Cours de L. Bastianello et O. Bos

Licence 3 – DU & CMI
Université Panthéon-Assas

Examen de compléments de microéconomie

Session de janvier 2018 – Durée: 3h00

Indications et consignes :
- Aucun document n'est autorisé ;
- Les machines à calculer et les téléphones portables sont interdits ;
- La qualité de la présentation et la tenue de la copie peuvent faire l'objet de points négatifs ;
- Toutes communications, quelque soit leur nature, sont interdites ;
- Le barême, sur 25, est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Partie : théorie de la décision (12 points)

Exercice 1. (2,5 points) Soit $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ un problème de choix.

1. (0,5 point) Donner la définition de l'axiome faible de préférences révélées.
2. (1 point) Soit $\mathcal{B} = \{\{x, y\}; \{x, y, z\}\}$ et $C(\{x, y\}) = x$. Montrer que si $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ satisfait l'axiome faible de préférences révélées alors nécessairement $C(\{x, y, z\}) = x$, $C(\{x, y, z\}) = z$ ou $C(\{x, y, z\}) = \{x, z\}$.
3. (1 point) Soit $\mathcal{B} = \{\{x, y\}; \{y, z\}; \{x, z\}; \{x, y, z\}\}$ avec $C(\{x, y\}) = x$, $C(\{y, z\}) = y$ et $C(\{x, z\}) = z$. Montrer que $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ ne peut pas satisfaire l'axiome faible de préférences révélées.

Exercice 2. (3 points) Considérons une relation de préférence $\succsim$ définie sur $\mathbb{R}^2_+$.

1. (1 point) Donner la définition de préférence *rationnelle*, préférence *monotone* et préférence *continue*.
2. (0,5 point) Est-ce que l'on pourrait observer une préférence rationnelle mais pas monotone ? Si oui, fournir un exemple. Si non, justifier pourquoi.
3. (1,5) Donner la définition de *préférences lexicographiques*.
   Donner une justification rigoureuse (=mathématique) aux questions suivantes.
   (a) Est-ce qu'elles sont monotones ?
   (b) Est-ce qu'elles sont continues ?

Exercice 3. (4 points) Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des loteries sur $C = (c_1, \dots, c_n)$. On muni $\mathcal{L}$ de la relation de préférence $\succsim$.

1. (0,5 point) Donner la définition de l'axiome d'indépendance.
2. (1 point) Supposons que les préférences satisfont l'axiome d'indépendance. Montrer que $L \succ L'$ et $\alpha \in (0,1)$ implique $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$.
   Donner une interprétation du résultat ci-dessus.
3. (0,5 point) Soit U une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$. Qu'est-ce que a veut dire que U est une fonction d'utilité de vonNeumann-Morgenstern. ?
4. (2 points) Montrer que $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité de vonNeumann-Morgenstern si et seulement si
$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$
   pour toutes loteries $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, ..., K$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_K) \geq 0; \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Exercice 4. (2,5 points) Considérons un individu avec richesse initiale w_0 et fonction d'utilité $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ égale $u(x) = \ln(x)$, qui considère d'investir dans un marché avec deux actifs. Un actif est non risqué : s'il investi 100\$ aujourd'hui, il aura 100\$ demain et donc le rendement est $r = 0$. L'autre est risqué : l'agent aura avec probabilité $p \in (0,1)$ un rendement $r_1 \in (-1,0)$ et avec probabilité $1-p \in (0,1)$ un rendement $r_2 \in (0,1)$ (donc s'il investi 100\$ en actif risqué il aura $100(1+r_i)$\$ demain, avec $i = 1, 2$).

1. (0,5 point) Soit $x \in [0, w_0]$ la partie de richesse investie dans l'actif risqué. Ecrire le problème de maximisation de l'agent. Est-ce que l'agent est risquophobe, risquophile ou neutre au risque (justifier) ?
2. (1 point) En tudiant les conditions du premier ordre, dire dans quels cas le choix optimal de l'agent est $x^* = 0$ et quand $x^* > 0$. Interpréter ce résultat.
3. (1 point) Donner une condition qui assure que $x^* = w_0$. Monter que cette condition ne peut pas être vérifié pour certains choix de r_1, r_2 et p (considérer par exemple $p = \frac{1}{2}$).

Partie : théorie des jeux (13 points)

Exercice 1 : Point fixe et existence d'équilibre (6 points) Le théorème de point fixe de Brouwer établit :

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide, compact et convexe et $f : A \longrightarrow A$ une fonction continue. Alors, $f(.)$ admet un point fixe (au moins un), c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $x = f(x)$.

1. A l'aide d'un ou plusieurs graphiques, expliquez le théorème de Brouwer. Pour cela vous pourrez supposer que $A = [0,1]$ et $n = 1$. Proposez également un graphique avec une fonction discontinue qui explique en quoi la continuité est une condition indispensable dans le théorème de Brouwer. (1 point)
2. Peut-on remédier à cette hypothèse de continuité ? Si oui comment ? Expliquez avec précision votre argumentation. (1 point)

   Indications : Un autre théorème de point fixe pourra être proposé, accompagné d'illustration(s) graphique(s).

3. Rappelez la définition d'un équilibre de Nash en stratégies pures et l'interpréter brièvement. (0,5 point)
4. En quoi un théorème de point de fixe peut assurer l'existence d'un équilibre en stratégies pures ? Votre réponse pourra vous amener à énoncer le théorème d'existence de Nash, éventuellement d'autres résultats (lemme/théorème) vues en cours et les démontrer (2,5 points). Alternativement, vous pourrez fournir uniquement des intuitions et explications.
5. Un théorème de point fixe peut-il guarantir l'unicité d'un équilibre en stratégies pures ? Argumentez brièvement votre réponse. Un graphique pourra être fournit. (1 point)

Exercice 2 : Equilibres (3 points) Déterminez tous les équilibres de Nash en stratégies pures et mixtes du jeu suivant sous sa forme matricielle :

J1/J2	G	M	D
h	(3,2)	(1,1)	(0,3/2)
b	(0,0)	(2,3)	(1,2)

Exercice 3 : Equilibres et stratégies prudentes (4 points) Soit le jeu suivant sous sa forme matricielle :

J1/J2	G	D
H	(a,b)	(0,0)
B	(0,0)	(c,d)

avec $a > c > 0$ et $b > d > 0$.

1. Déterminez tous les équilibres de Nash de ce jeux (pures et mixtes). Un graphique représentant les stratégies à l'équilibre des deux joueurs est attendu. (1 points)
2. Après avoir rappelé sa définition, déterminez les stratégies (pures et mixtes) prudentes ou maximin du joueur 1. Votre raisonnement sera double, analytique et graphique. (2 points)
3. Les payoffs maximin du joueur 1 sont-ils plus élevés en stratégies pures ou en stratégies complètement mixtes ? Pourquoi ? (0,5 point)
4. Comment modifier certains paramètres de ce jeu, c'est-à-dire a, b, c, d, pour s'assurer, sans même le résoudre, que les stratégies (mixtes) maximin soient les stratégies mixtes à l'équilibre ? (0,5 point)