Olivier Bos
olivier.bos[at]u-paris2.fr

Licence 3 – DU & CMI
Université Panthéon-Assas

Examen de compléments de microéconomie

Session de janvier 2017 – Durée: 3h00

Indications et consignes :

— Aucun document n'est autorisé ;
— Les machines à calculer et les téléphones portables sont interdits ;
— La qualité de la présentation et la tenue de la copie peuvent faire l'objet de points négatifs ;
— Toutes communications, quelque soit leur nature, sont interdites ;
— Le barême, sur 32 (47 points sont disponibles), est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 : Relation de préférence (6 points).

1. Rappelez (avec précision) les propriétés que doit vérifier une relation de préférence dite rationnelle. (1 point)
2. Montrez qu'une relation de préférence $\succeq$ peut être représentée par une fonction d'utilité seulement si $\succeq$ est rationnelle. Soyez rigoureux. (3 points)
3. Soit une relation de préférence rationnelle $\succeq$. Rappelez l'axiome de continuité des préférences. Donnez un exemple de préférences discontinues. (2 points)

Exercice 2 : Point fixe et existence d'équilibre (10 points) Le théorème de point fixe de Brouwer établit :

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide, compact et convexe et $f : A \longrightarrow A$ une fonction continue. Alors, $f(.)$ admet un point fixe (au moins un), c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $x = f(x)$.

1. A l'aide d'un ou plusieurs graphiques, expliquez le théorème de Brouwer. Pour cela vous pourrez supposer que $A = [0, 1]$ et $n = 1$. Proposez également un graphique avec une fonction discontinue qui explique en quoi la continuité est une condition indispensable dans le théorème de Brouwer. (2 points)
2. Peut-on remédier à cette hypothèse de continuité ? Si oui comment ? Expliquez avec précision votre argumentation. (2 points)

   Indications : Un autre théorème de point fixe pourra être proposé, accompagné d'illustration(s) graphique(s).

3. Rappelez la définition d'un équilibre de Nash en stratégies pures et l'interpréter brièvement. (1 point)
4. En quoi un théorème de point de fixe peut assurer l'existence d'un équilibre en stratégies pures ? Votre réponse pourra vous amener à énoncer le théorème d'existence de Nash, éventuellement d'autres résultats (lemme/théorème) vues en cours et les démontrer (5 points). Alternativement, vous pourrez fournir uniquement des intuitions et explications (3 points).
5. Un théorème de point fixe peut-il guarantir l'unicité d'un équilibre en stratégies pures ? Argumentez brièvement votre réponse. Un graphique pourra être fournit. (2 points)

Exercice 3 : Dilemme du prisonnier (3 points) Déterminer tous les équilibres de Nash du jeu suivant :

J1/J2	NC	C
NC	-1, -1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

Exercice 4 : Feuille, papier, ciseaux (8 points)

1. Déterminez tous les équilibres de Nash en stratégies pures du jeux suivant présenté sous sa forme matricielle : (2 points)

J1/J2	F	P	C
F	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
P	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

2. Y a t-il des équilibres de Nash où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ? Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0$? (3 points)
3. Y a t-il un équilibre où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ? (3 points)

Exercice 5 : Jeu d'enchère : l'enchère au second-prix (11,5 points). Soit n acheteurs potentiels qui participent à une enchère. Le joueur i accorde une valeur $v_i > 0$ à l'objet mis en vente, valeur qui est connue de tous les joueurs et qui peut-être interprétée comme sa disposition marginale à payer ou sa valorisation de l'objet mis en vente. Les joueurs soumettent une seule offre, notée $b_1, ..., b_n$ de façon simultanée (le jeu est donc statique, cette enchère est dite sous plis-scellée). Les règles de l'enchère sont les suivantes :

— Le vainqueur est le joueur ayant soumis l'offre la plus élevée ;
— Le vainqueur paye un montant égal à l'offre la plus élevée des autres joueurs, soit encore la seconde offre la plus élevée, les perdants payent une somme égale à 0 ;
— Si k joueurs soumettent une offre identique et qui s'avère être la plus élevée, chaque joueur reçoit une fraction $1/k$ de l'objet mis en vente et paie l'offre la plus élevée parmi celle des ses concurrents (c'est-à-dire égale à la sienne).

Ainsi, si le joueur 1 gagne l'enchère il retire une utilité égale à la différence entre le bien-être que lui apporte l'objet gagné et le paiement versé, soit encore $u_1(v_1, b_1, ..., b_n) = v_1 - \max_{i \neq 1} b_i$. Si le joueur 1 perd il obtient une utilité nulle, $u_1(v_1, b_1, ..., b_n) = 0$ et s'il soumet l'offre maximale égale celle de k autres joueurs, il reçoit une utilité $u_1(v_1, b_1, ..., b_n) = \dfrac{v_1}{k} - b_1$.

Indications : Les questions 1, 2 et 6 peuvent être résolues indépendamments.

1. Ecrire la forme normale (ou stratégique de ce jeu). (1 point)
2. $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ est-il un équilibre ? Justifiez. (1 point)

   Nous souhaitons désormais déterminer si soumettre sa valeur, $b_1 = v_1, b_2 = v_2, b_3 = v_3, ..., b_n = v_n$, est un équilibre de Nash en stratégies pures. Pour cela il suffit de regarder s'il existe des déviations unilatéralement profitables (en particulier pour un joueur, par exemple le joueur 1).

   Remarque : Afin de simplifier l'analyse, nous supposons qu'il ne peut y avoir qu'une seule offre maximale, nous excluons ainsi le cas où $v_1 = \bar{b} = \max_{j \neq i} v_j$. Cela ne change pour autant pas les résultats.
3. Pour le joueur 1, une déviation possible est de soumettre une offre $b_1 > v_1$. Trois cas doivent alors être envisagés :
   — $b_1 > v_1 > \bar{b}$ (il gagnait avant la déviation, il gagne à nouveau après la déviation) ;
   — $b_1 > \bar{b} > v_1$ (il perdait avant la déviation, désormais il gagne après la déviation) ;
   — $\bar{b} > b_1 > v_1$ (il perdait avant la déviation, il perd à nouveau après la déviation).
   Cette déviation est-elle profitable ? (3 points)
4. Quelle autre déviation est possible pour le joueur 1 (elle conduit également à trois cas que vous devez énumérer) ? Etant données les résultats à la question précédente, que pouvez-vous déduire de cette déviation, est-elle profitable ? (2 point)
5. A l'aide des deux questions précédentes, $b_i = v_i \; \forall i$ est-il un équilibre de Nash ? Pourquoi ? Si oui quelle est sa particularité ? (1,5 points)
6. Jusqu'ici ce jeu était en information complète. Rappeler la différence entre information complète, information incomplète, information parfaite et information imparfaite. Quel lien existe entre l'information incomplète et l'information imparfaite ? (1,5 points)
7. Supposons que les joueurs ne connaissent plus les valeurs de leurs concurrents (mais jouent toujours de façon simultanée). Ce jeu est-il à information imparfaite ou incomplète ? En relisant le méthode utilisée dans les questions précédentes et les résultats obtenues, pensez-vous que l'information incomplète va affecter l'équilibre ? Si oui comment ? Si non pourquoi ? (1,5 points)

Exercice 6 : Concurrence monopolistique, Dixit-Stiglitz (8,5 points). On considère un marché de concurrence monopolistique où s'échangent n variétés d'un même bien, chacune produite par une firme mono-produit et une seule. Les variétés sont indicées par i, i variant de 1 à n, la variété i étant produite par la firme i.

On notera x_i la quantité demandée de la variété i, et x le vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$; Toutes les firmes sont identiques et sont caractérisées par la fonction de coût total $C(x_i) = cx_i + f$, avec $c > 0, f > 0$. La demande pour n variétés émane de N consommateurs tous identiques dont les préférences sont définies sur des paniers (m, x) où m est la monnaie, qui représente la dépense consacrée par les consommateurs à d'autres biens. Chaque consommateur est caractérisé par la fonction d'utilité

$$u(m, x) = m + \frac{1}{n(1-a)} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-a}$$

avec $0 < a < 1$, lorsque n variétés sont présentes sur le marché. Les consommateurs ont tous le même revenu r. On note p_i le prix de la variété i. Le prix de la monnaie est égale à 1.

Les firmes jouent un jeu en deux étapes. Il y a un nombre potentiel arbitrairement grand de firmes et de variétés. A la première étape chaque firme décide d'entrer ou non sur le marché. A la seconde étape, les n firmes présentes se font concurrence en prix : chaque firme i choisit un prix p_i et sert la demande x_i qui lui est adressée.

Indications : La question 2 nécessite l'utilisation de vos connaissances en microéconomie et en optimisation. Les questions suivantes peuvent être résolues sans que les questions 1, 2 et 3 aient été traitées.

1. Quel concept d'équilibre est utilisé ici ? Comment résoudre un tel jeu ? (1 point)
2. Ecrire la contrainte de budget à laquelle font face les consommateurs. (1 point)

   Rappel : La contrainte de budget fait intervenir le revenu et tous les biens pour lesquels le revenu est dépensé. Prenez garde à ne pas confondre le revenu r des consommateurs et la monnaie m qui est un bien parmi d'autres.
3. Ecrire le programme de maximisation sous contrainte d'un consommateur et déterminer ses fonctions de demande $x_i(p_i)$ pour les variétés $i = 1, ..., n$. (2 points)
4. Supposons désormais que la fonction de demande d'un consommateur pour la variété i est $x_i = (np_i)^\beta$ avec $\beta \equiv -\frac{1}{a}$. Calculer l'équilibre du jeu de concurrence monopolistique décrit ci-dessus :

   a. Ecrire la fonction de profit de la firme mono-produit qui produit la variété i.

   Indications : Remarquer que chaque firme i produit uniquement la variété de bien i qui est demandée par tous les consommateurs (c'est-à-dire par N consommateurs).

   Calculer alors l'équilibre de Nash symétrique du sous-jeu de concurrence en prix. (2 points)

   b. Calculer ensuite le nombre de firmes présentes à l'équilibre d'entrée. (0,5 point)

   Rappel : A l'équilibre de libre entrée, les firmes réalisent un profit nul.
5. Supposons que le prix à l'équilibre du sous-jeu de concurrence soit égal à 0. Cet équilibre est-il possible ? Justifier. Si oui, quel est alors le nombre de firmes présentes à l'équilibre d'entrée ? (2 points)