Olivier Bos
olivier.bos[at]u-paris2.fr

Eléments de correction de l'examen de compléments de microéconomie

Session de janvier 2017 – Durée: 3h

Exercices 1, 3 et 4. Voir le cours.

Exercice 2 : Point fixe et existence d'équilibre.

Questions 1 – 4. Voir le cours.

Question 5. Il suffit d'avoir plus d'un point fixe pour plus qu'un équilibre existe. Le théorème de Brouwer peut facilement être illustrer par un graphique avec $A = [0, 1]$ et $n = 1$ où $f(.)$ coupe deux fois la première bissectrice. Ainsi deux équilibres existent.

Exercice 5 : Jeu d'enchère : l'enchère au second-prix.

Question 1. Le jeu d'enchère $\Gamma = (\mathcal{N}, \mathbb{R}_+, u_i, i \in \mathcal{N})$ sous forme normale ou stratégique est décrit par :

- L'ensemble des joueurs $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$;
- L'espace des actions (ici des offres) pour chaque joueur i est noté $\mathbb{R}_+$, où chaque joueur i choisit l'offre b_i, élément de $\mathbb{R}_+$.
- La fonction d'utilité de chaque joueur i est telle que

$$u_i(v_i, b_1, ..., b_n) = \begin{cases} v_i - \max\limits_{j \neq i} b_j \text{ si } b_i > \max\limits_{j \neq i} b_j \\ 0 \text{ si } b_i < \max\limits_{j \neq i} b_j \\ \dfrac{v_i}{k} - b_i \text{ si } b_i \geq \max\limits_{j \neq i} b_j \text{ et } b_i \text{ est égale à } k \text{ autres offres.} \end{cases}$$

Question 2. Le joueur 1 obtient dans le cas proposé ici un gain de $\frac{v_1}{n}$. S'il dévie et propose une offre $b_1 = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ il gagne avec probabilité 1 et paye 0 (seconde offre la plus élevée), ce qui le conduit à un gain de v_1. La déviation est profitable.

Question 3. Tous jouent $b_i = v_i$ sauf le joueur 1 qui propose $b_1 > v_1$. Cette déviation conduit à étudier trois cas possibles :

— $b_1 > v_1 > \bar{b}$. 1 gagnait avant la déviation et obtenait un gain de $v_1 - \bar{b}$, il gagne à nouveau après la déviation et son payoff demeure inchangé. Il est donc indifférent à dévier ou non.

— $b_1 > \bar{b} > v_1$. 1 perdait avant la déviation pour un payoff de 0, désormais il gagne et obtient un payoff de $v_1 - \bar{b} < 0$. Dévier est ici dominé.

— $\bar{b} > b_1 > v_1$. 1 perdait avant la déviation, il perd à nouveau après et obtient le même payoff égale à 0. Il est indifférent à dévier.

Dévier conduit à un payoff identique ou inférieur, c'est une stratégie dominée. Le joueur 1 ne fera déviera jamais en faisant $b_1 > v_1$.

Question 4. Le joueur 1 peut aussi dévier en jouant $b_1 < v_1$. Cette déviation conduit à étudier trois cas possibles :

1. $b_1 < v_1 < \bar{b}$, 1 perdait avant la déviation, il perd à nouveau ;
2. $b_1 < \bar{b} < v_1$, 1 gagnait avant la déviation et perd désormais ;
3. $\bar{b} < b_1 < v_1$, 1 gagnait avant la déviation, il gagne à nouveau.

Cette déviation est symétrique à celle traitée à la question précédente. Etant donnée les résultats précédents, les cas 1 et 3 conduisent à un gain identique à celui avant la déviation et le cas 2 à déviation non profitable : avant la déviation le joueur avait un payoff de $v_1 - \bar{b} > 0$, désormais il a un payoff nul. Le joueur 1 ne déviera jamais en faisant $b_1 < v_1$.

Question 5. Dévier en proposant une offre supérieure ou inférieure est une stratégie dominée. Soumettre sa valeur est une stratégie faiblement dominante et donc bien un équilibre de Nash, un équilibre en stratégies dominante.

Question 6. Voir le cours.

Question 7. Désormais les joueurs ne connaissent pas les valeur de leurs concurrents, donc leurs préférences, le jeu est en information incomplète. L'équilibre déterminé ci-dessus est en stratégies dominantes et chaque joue sa valeur sans jamais faire état de la connaissance de la valeur de ses concurrents. Peu importe ses croyances et son niveau de connaissance de la valeur des autres joueurs, jouer sa valeur sera toujours une stratégie dominante. L'équilibre n'est donc pas affecté.

Exercice 6 : Concurrence monopolistique, Dixit-Stiglitz

Question 1. Equilibre de Nash en sous-jeux parfait. On raisonne par induction arrière, *ie* on va résoudre le jeu en partant de la date 2.

Question 2. Chaque consommateur dipose d'un budget r qu'il consacre à la consommation de chaque variété i pour un prix p_i et autres biens disponibles à travers la monnaie (au prix unitiaire). D'où

$$r \geq m + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Question 3. On résout le programme de maximisation sous contrainte qui peut se réécrire comme

$$\max_{x_i \ i=1,..,n} m + \frac{1}{n(1-a)} \sum_i x_i^{1-a} \text{ sous la contrainte } r \geq m + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

La contrainte de budget est saturée à l'optimum. La résolution s'effectue à l'aide d'un lagrangien ou encore en introduisant la contrainte dans la fonction objectif soit ici :

$$\max_{x_i \ i=1,..,n} r - \sum_i p_i x_i + \frac{1}{n(1-a)} \sum_i x_i^{1-a}$$

La CPO conduit à $x_i = (np_i)^{\beta}$ avec $\beta \equiv -\frac{1}{a}$

Question 4a. On cherche le prix qui maximise le profit

$$\pi_i(p_i) = N(p_i - c)x_i(p) - f$$

La condition de premier order (CPO) du profit, en ayant introduit la fonction de demande, nous donne après réécriture :

$$(np_i)^{\beta-1}[np_i + p_i\beta n - c\beta n] = 0 \Leftrightarrow p^\star = 0 \text{ ou } p^\star = \frac{c}{1-a} \ \ \forall i$$

On remarque que $p^\star = \frac{c}{1-a} > c$. Par suite,

$$\begin{aligned} \pi^\star &= N\left[\left(\frac{c}{1-a} - c\right)\left(n\frac{c}{1-a}\right)^{\beta}\right] - f \\ &= \frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} - f \end{aligned}$$

L'équilibre est donné par

$$\xi = \left\{ p^\star = \frac{c}{1-a}, x_i^\star = \left(\frac{nc}{1-a}\right)^{\beta}, \pi^\star = \frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} - f \right\}$$

Question 4b. A l'équilibre de libre entrée $\pi^\star = 0$ soit encore $\frac{Na}{n^{1/a}}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{\frac{1-a}{a}} = f$ d'où

$$n^\star = \left(\frac{Na}{f}\right)^{a}\left(\frac{1-a}{c}\right)^{1-a}$$

$n^\star$ a très peu de chance d'être un entier. Ainsi, l'équilibre de libre entrée est constituée de la partie entière de $n^\star$, les firmes réalisant un profit (faible) positif.

Question 5. $p^\star = 0$ est un également un équilibre (prouvé dans la CPO précédente) mais dégénéré. Dans ce cas, les profits sont négatifs. Les firmes sortent.