Microéconomie approfondie
Chapitre 5 : Jeux sous forme extensive

Jeux dynamiques

Olivier Bos
olivier.bos@u-paris2.fr

Plan du chapitre

- Réprésentation des jeux sous formes extensives et propriétés;
- Information parfaite et complète;
- Concept de solution : l'équilibre de Nash en sous-jeu parfait;
- Illustration 1 : Cournot séquentiel;
- Illustration 2 : le modèle d'Hotelling.
- Illustration 3 : monopole et bien durable.

Définition.

Definition 1

un jeu Γ *est dit sous forme extensive (développée) si il prend en compte de manière détaillée la structure séquentielle du problème de décision (arbre de jeu), l'évolution de l'information, des croyances, et des possibilités d'action.*

Exemples :

- Jeu d'échec, poker;
- Duopole de Stackelberg (leader / follower);
- Problème d'entrée d'une firme sur un marché;

Raffinement possible du concept d'équilibre de Nash en éliminant, par exemple, des menaces d'actions non crédibles (équilibre de Nash parfait en sous-jeux, Selten, 1965).

Jeux sous forme extensive

Exemple : un jeu d'entrée

- Une firme M est en situation de monopole sur un marché.
- Une autre firme E peut décider d'entrer (e) ou non (n) sur le marché.
- Si la firme E décide d'entrer, la firme M peut alors soit combattre (c), soit laisser-faire (l).
- Les paiements pour E et pour M sont (0, 3) si E n'entre pas, (-1,0) si E entre et M combat, et (1, 1) si E entre et M laisse faire.

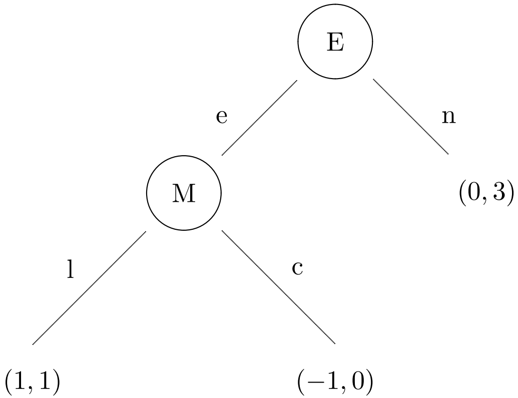
Sous forme normal, on obtient la matrice

E/M	l	c
e	1,1	-1,0
n	0,3	0,3

Jeux sous forme extensive

Exemple : un jeu d'entrée

La forme extensive représente le jeu sous forme d'arbre des décisions.
On représente le jeu d'entrée par l'arbre suivant :



Définition 2.

Un jeu sous forme extensive est décrit par

- L'ensemble des joueurs $N = \{1, 2, ..., i, ..., n\}$;
- L'ensemble X des noeuds de l'arbre :
  - Le noeud initial : sans prédécesseur et prédécesseur de tous les autres;
  - Tous les autres noeuds ont un et un seul prédécesseur immédiat;
  - Les noeuds terminaux : sans successeur;
  - Les noeuds de décision : les noeuds non terminaux associés à un seul joueur (ou bien à la Nature, qui détermine les événements aléatoires);
- L'ensemble des actions pour chaque joueur à chacun de ses noeuds de décision (branches de l'arbre).
- $(H_i)_{i \in N}$: partitions des noeuds de décision en ensembles d'information. $\forall x \in h_i$, les actions disponibles par le joueur i en x sont les mêmes;
- $(u_i)_{i \in N}$: utilités des joueurs aux noeuds terminaux;
- Probabilités des éventuels états de la Nature.

Exemples

Information parfaite/imparfaite

Si tous les ensembles d'information du jeu sont réduits à des singletons alors chaque joueur, lors de sa prise de décision

- connaît tous les évènements passés;
- sait ce que les autres ont joué auparavant;
- personne ne joue simultanément.

Le jeu est dit à information parfaite (jeu d'échec, duopole de Stackelberg, jeu de l'ultimatum, jeu d'entrée)

Sinon, le jeu est à information imparfaite (poker, duopole de Bertrand/Cournot, dilemme du prisonnier)

Information complète/incomplète

Si certains joueurs ne connaissent pas la structure du jeu, i.e., ne connaissent pas parfaitement :

- les préférences des joueurs;
- l'identité ou le nombre de joueurs;
- les actions disponibles;
- l'ordre des décisions;

le jeu est dit à information incomplète.

Harsanyi propose d'introduire un joueur fictif, appelée nature, qui détermine les éléments aléatoires du jeu (les états de la Nature, incluant les croyances des joueurs), avec une distribution de probabilité a priori commune. Un cas particulier sont les jeux bayésiens. Conséquence :

$$\text{information incomplète} \;\Rightarrow\; \text{information imparfaite}$$

Exemple : jeu de signal

Un vendeur d'un bien propose un prix unitaire p, puis un consommateur doit décider de la quantité de bien q qu'il va acheter après avoir observé le prix fixé par le vendeur.

- C'est un jeu a information incomplète car tous les joueurs ne connaissent pas nécessairement la fonction de profit du vendeur et la fonction d'utilité du consommateur (par exemple, l'incertitude sur la qualité du produit).
- On peut introduire un un ensemble d'états de la Nature Ω, et d'une distribution de probabilité a priori $\mu \in \Delta(\Omega)$.

Configuration la plus simple :

- un état de la Nature pour chaque niveau de qualité : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
- le vendeur connaît toujours la qualité;
- le consommateur ne connaît jamais la qualité.

Le joueur 1 (le joueur informé) est appelé l'émetteur et le joueur 2 (le joueur non informé) le récepteur.

Stratégies et réduction en forme normale

Definition 2

Une stratégie est un plan d'action d'un joueur à chacun de ses ensembles d'information (atteints ou non) de telle sorte que la donnée des stratégies choisies par chaque joueur et de l'état de la nature définissent complètement le déroulement (trajectoire, chemin) futur du jeu à partir de n'importe quel noeud de l'arbre.

Plus précisément, une stratégie pure du joueur i est une fonction

$$\begin{aligned} s_i : \quad & H_i \to A_i \\ & h_i \to a_i \in A(h_i) \end{aligned}$$

qui associe à chaque ensemble d'information $h_i \in H_i$ une action $a_i \in A(h_i)$, où $A(h_i)$ est l'ensemble des actions disponibles pour l'ensemble d'information h_i.

Equilibres

Definition 3 (Sous-jeu)

Un sous-jeu d'un jeu Γ sous forme extensive est un jeu sous forme extensive représenté par un arbre dont le nœud d'origine est un nœud non-terminal de l'arbre initial, où les joueurs, les ensembles d'information et les actions associées aux nœuds non terminaux sont les mêmes que dans le jeu original Γ.

Un sous-jeu strict ou propre de Γ est un sou-jeu différent de Γ.
Quel est le nombre de sous-jeux (stricts) dans le jeu d'entrée ? Dans le dilemme du prisonnier ? Dans l'ultimatum game ?

Equilibre de Nash en sous-jeux parfait

Definition 4 (Equilibre en sous-jeux parfait)

Dans un jeu sous forme extensive, un équilibre est dit en sous-jeux parfait s'il induit un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Remarques :

- L'ensemble des ENSJP est inclu dans l'ensemble des EN;
- Si pas de sous-jeux stricts, alors les ENJSP $\Leftrightarrow$ EN.

Résolution par induction à rebours (Backward induction)

Pour déterminer un équilibre on utilise la méthode d'induction à rebours ou backward induction (Algorithme de Kuhn, 1953).

- Pour choisir leurs actions successives, les joueurs : anticipent les stratégies des autres et prennent en compte les conséquences en terme de réaction stratégiques
- Pour résoudre le jeu, on raisonne de la même manière, en partant de la fin (résolution de la dernière étape).
- remplacer la dernière étape par le résultat d'équilibre dans l'avant-dernière étape et ainsi de suite...
- La procédure de récurrence arrière sélectionne (au moins) un profil de stratégie. Les profils ainsi obtenus sont les équilibres parfaits en sous-jeux.

Proposition 1 (Kuhn, 1953)

Tout jeu fini à information parfaite possède au moins un équilibre de Nash parfait en sous-jeux en stratégies pures.

Equilibre de Nash en sous-jeux parfait

Remarques :

- L'ensemble des actions à chaque ensemble d'information doit être fini : si $A = [0,1[$ et $u_i(a) = a$ alors il n'y a pas d'ENPSJ;
- La durée du jeu doit-être finie;
- Il y a unicité de l'ENPSJ dans les jeux à information parfaite si les joueurs ne sont jamais indifférents entre deux issues possibles.

Menaces non crédibles

Dans de nombreux jeux, il existe des équilibres de Nash “non raisonnables”, qui reposent sur des choix hypothétiques irrationnels, des menaces d’actions non crédibles.

Dans le jeu d’entrée, un second équilibre de Nash en stratégies pures existe : (n, c). L’induction à rebours ne conduit pas à tous les équilibres en stratégies pures mais uniquement à ceux dont le comportement des deux joueurs est crédible. La stratégie combattre de M est une menace non-crédible. L’induction à rebours prend en compte la séquentialité des actions et permet un raffinement de l’équilibre de Nash que l’on appelle équilibre en sous-jeux. parfait.

Cournot avec décisions séquentielles

Même structure de jeu que dans le duopole de Cournot :

- les joueurs : les firmes;
- Ensemble de stratégies/actions : tous les niveaux de productions/quantités possibles $q_i \in \mathbb{R}_+$;
- Fonctions de payoffs (de profits) :

$$\pi_i(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_i - C_i(q_i);$$

à ceci près que les firmes prennent leur décision séquentiellement.

Timing

1. La firme 1 décide de la quantité qu'elle produit, q_1.
2. La firme 2 décide de la quantité qu'elle produit, q_2.

Cournot avec décisions séquentielles

Quel concept d'équilibre utilise t-on ici ?
C'est un jeu séquentiel, nous devons donc chercher les équilibres en sous-jeux parfaits. Puisqu'il y a un nombre fini de période on peut utiliser la backward induction pour résoudre.

Commençons par résoudre en $t = 2$, et supposons que la firme 1 a déjà pris sa décision de production q_1. Que fait la firme 2 ?
Elle a la même stratégie que chez Cournot : $q_2 = R_2(q_1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1$

Cournot avec décisions séquentielles

En $t = 1$. La firme 1 sait que si elle décide de produire q_1, la firme 2 va réagir en fixant $R_2(q_1)$ en seconde période. $\Rightarrow$ la firme 1 maximise $\pi_1(q_1, R_2(q_1)$ ie :

$$\max_{q_1} \left(a - b \left(q_1 + \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} q_1 \right) - c \right) q_1$$

Après un peu d'algèbre, on obtient

- $q_1^s = \frac{a-c}{2b} = \frac{3}{2} q^c$
- On en déduit $q_2^s = \frac{a-c}{4b} = \frac{3}{4} q^c$. Comment ? En utilisant $R_2(q_1)$.
- Qui fait le plus de profit ?
  - La firme 1 est appelée le leader car elle profite d'un avantage : elle prend sa décision en première et oblige la sconde firme, le follower a s'adapter. Le leader fait donc plus de profit que le follower.
  - Le prix à l'équilibre est plus faible que celui de Cournot $p^s < p^c$ et $Q^s > Q^c$.

Conséquence : π_1 augmente, p diminue donc le surplus des consommateurs augmente.

Cournot avec décisions séquentielles

Remarques

- Le leader est mieux que chez Cournot. Il y a une façon simple de voir cela :
  - Si la firme 1 fixe $q_1 = q^c$, alors, la meilleure réponse du follower est $R_2(q^c) = q^c$. Dans ce cas, le leader a le profit de Cournot.
  - Mais dans ce cas, il peut fixer une quantité plus élevé $q_1^s \neq q_1^c$ pour augmenter son profit $\pi_1^s > \pi_1^c$ (profitabilité révélée de la firme 2).
- Pourquoi le leader fixe t-il $q_1^s > q_1^c$?
  - Commençons par $q_1 = q^c$. La firme 1 veut-elle augmenter son q_1 ?
  - Rappel : $\pi_1^s(q_1) \equiv \pi_1(q_1, R_2(q_1))$. On a donc

$$\frac{d\pi_1^s}{dq_1}(q^c) = \underbrace{\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q^c, q^c)}_{=0, équil. Cournot} + \underbrace{R_2'(q^c)\frac{\partial \pi_1}{\partial q_2}(q^c, q^c)}_{(1)}$$

  - (1) est positif puisque les quantités sont des substituts stratégiques (une hausse de q_2 diminue π_1).
  - On a donc $\frac{d\pi_1^s}{dq_1}(q^c) > 0$! Le leader peut augmenter ses quantités pour augmenter son profit.

Modèle d'Hotelling

On ne fait désormais plus l'hypothèse que les firmes offrent des produits homogènes.
Des produits différenciés sont dits "similaires" mais pas identiques, ce sont des substituts proches mais imparfaits.

Il y a deux types de différenciations des produits :

1. La différenciation horizontale. Si tous les produits sont au même prix, les consommateurs sont en désaccord quant à celui à acheter.
   Dans quel Starbuck aller, 15ème ou 11ème ? (problème de localisation géographique)
   Quels films, chaussures, livres choisir ?
2. La différenciation verticale. Si tous les produits sont au même prix, les consommateurs sont d'accord sur le classement des produits mais en désaccord quant à leur disposition à payer pour le produit en haut de classement versus celui en bas de classement.
   Par exemple, quelle mémoire vive pour un ordinateur ? Quelle compagnie aérienne choisir ?Quelle quantité d'un bien acheter ?

Modèle d'Hotelling

On peut aussi voir ces deux différenciation avec une approche hédonique (ou de caractéristiques).

Pensez à un produit ayant une multitude de caractéristiques. Par exemple une voiture : couleur et puissance. La couleur est une caractéristique de différenciation horizontale, la puissance est une caractéristique de différenciation verticale.

La différenciation horizontale est une différenciation de goût et la différenciation verticale de qualité.

Modèle d'Hotelling

On propose un modèle de concurrence par les prix avec des produits différenciés : concurrence à la Bertrand avec des produits différenciés. L'idée initiale est due à Hotelling (1929), souvent cité comme le modèle de la ville linéaire d'Hotelling. Harold Hotelling est un économiste et statisticien américain (1895 - 1973)

- Soit une plage longue d'1 km.
- Supposons que 1000 consommateurs sont distribués de façon uniforme sur cette plage. Par exemple, tous les 250 m on y rencontre 250 personnes.
- On y trouve aussi deux vendeurs de glace, un au début de la plage, un à la fin de la plage.
- Les plagistes doivent marcher au plus 500m pour rencontrer le vendeur de glace le plus proche.
- Marcher est fatiguant...cela me demande un effort t par km parcouru. Au retour le bien-être de ma glace me fait oublier la distance de retour (coût du retour nul).
- Donc, me rendre au vendeur de glace à 20 mètres, me coûte $0,2t$.

Modèle d'Hotelling

- Donc si je paye p pour le produit et que je suis à 20 mètres, le prix total est $p + 0,2t$.
- Si sur la plage je suis à une distance x d'un vendeur, je suis à $1 - x$ de l'autre.
- Soit p_g et p_d les prix payés aux vendeurs à droite et à gauche du consommateur. En étant à une distance x du vendeur de gauche, les prix totaux sont

$$p_g + tx \text{ et } p_d + t(1 - x)$$

- Je peux aussi refuser d'acheter la glace. Si je l'achète elle me procure une utilité brute v

Quel type de différenciation capte ce modèle ?

Modèle d'Hotelling

Ils s'agit d'un modèle de différenciation horizontale :

- Supposons que le consommateur soit à gauche de la plage et que $p_d = p_g = p$. Il suit que le gain à aller
  à gauche est de $v - p$
  à droite est de $v - p - t$.
  Inversement pour le consommateur localisé à droite de la plage.
  Les consommateurs sont en désaccord quant au vendeur auquel il faut se rendre.
- Si sur la plage je suis à une distance x d'un vendeur, je suis à $1 - x$ de l'autre.
- Soit p_g et p_d les prix payés aux vendeurs à droite et à gauche du consommateur. En étant à une distance x du vendeur de gauche, les prix totaux sont $p_g + tx$ et $p_d + t(1 - x)$: vous n'allez pas toujours à la firme la plus proche, cela dépend du prix unitaire qu'elle vous propose.
- Quel est le problème du consommateur ?

$$\max\{v - p_g - tx, v - p_d - t(1 - x), 0\}$$

Modèle d'Hotelling

Supposons que tous les consommateurs achètent à une des deux firmes, il y a un consommateur $x^\star$ indifférent ente les deux. Quel est-il ?

on peut alors déterminer les fonctions de demande pour les produits différenciés

$D_g(p_g, p_d) = 1000.distance[0, x^\star], \;\; D_d(p_g, p_d) = 1000.distance[x^\star, 1]$ soit

$$D_g(p_g, p_d) = 1000x^\star, \;\; D_d(p_g, p_d) = 1000(1 - x^\star)$$

Attention on a fait l'hypothèse que tous achètent. Vrai si et seulement si le consommateur marginal veut consommer.

Modèle d'Hotelling

- Plage = espace des produits;
- effort de la marche et localisation = goût des consommateurs pour des produits différenciés : je préfère aller chez un vendeur loin de chez moi si le prix est à l'untié est suffisamment faible.

Question naturel : les biens sont des compléments ou des subsituts ?

On peut calculer des élasticité prix croisé de la demande $\varepsilon_{gd} = \frac{p_d}{D_g(p_g,p_d)} \frac{\partial D_g}{\partial p_d}(p_g, p_d) > 0$ si substituts. Une hausse de 1% de p_d augmente D_g.
Rappel : $\varepsilon_{gg} = \frac{p_g}{D_g(p_g,p_d)} \frac{\partial D_g}{\partial p_g}(p_g, p_d)? < 0$

Modèle d'Hotelling

Revenons à notre problème et décrivons-le comme un jeu sous forme normal :

- Joueurs : Firme 1 et Firme 2
- Actions : $p_i \in \mathbb{R}_+$
- Payoffs : $\pi(p_1, p_2) = (p_i - c)D_i(p_i, p_j)$

On cherche seulement les équilibres de Nash symétriques. Supposons qu'il y a une masse 1 de consommateurs (au lieu de 1000). Supposons que l'équilibre de Nash existe et que le marché est couvert, ie tous les consommateurs consomment. Les fonctions de demande deviennent ici

$$D_1(p_1, p_2) = x^\star, D_2(p_1, p_2) = 1 - x^\star$$

et les profits

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c)\left(\frac{1}{2} + \frac{p_j - p_i}{2t}\right)$$

Quel est l'équilibre de Nash ?Condition de premier ordre à calculer...

Modèle d'Hotelling

- $\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}(p_i, p_j) = 0$ soit encore $R_i(p_j) = \frac{t}{2} + \frac{c+p_j}{2}$.
  Si p_j augmente, p_i augmente aussi. Ce sont donc des compléments stratégiques ! C'est la cas de la pluspart des modèles de concurrence en prix avec différenciation.
- A l'équilibre $p_1 = p_2$ pourquoi ? $= c + t$
  Il y a un unique équilibre de Nash lorsque le marché est couvert.
- Il nous faut encore vérifier que tous les consommateurs ont une utilité positive à consommer : astuce, s'occuper seulement du consommateur indifférent. Pourquoi ?
  comme $p_1 = p_2$, $x^\star = 1/2$ et $U_{x^\star} = v - \frac{t}{2} - p = v - \frac{3t}{2} - c$
- Conclusion : Il existe un unique EN tel que le marché soit couvert et tous les consommateurs ont un gain positif si et seulement si $v > \frac{3t}{2} + c$.

Modèle d'Hotelling

On a supposé jusqu'ici que les firmes avaient une localisation fixée à l'avance. Supposons désormais qu'elles puissent choisir leur localisation sur le segment. Autrement dit les firmes se font concurrence dans l'espace des produits. Quelle localisation les firmes doivent-elles choisir et quelles prix unitaires fixent-elles ?

Compliquons les données : le consommateur situé en x paye un coût de transport quadratique pour se rendre la firme situé en l_i : $t(x - l_i)^2$.

Supposons que la firme 1 soit en monopole, ou doit-elle se localiser ? Au milieu ! Elle pourra attirer le plus de consommateurs au prix le plus élevé.
On fait désormais face à un jeu en deux étapes

- Etape 1 : choix de la localisation $(a, b) \in [0, 1]$.
- Etape 2 : décision en prix.

Rien de nouveau : ENSJP, backward induction...
Hypothèse : v assez grand pour que le marché soit couvert.

Modèle d'Hotelling

Etape 2 : $a < b$

avant toute chose il nous faut déterminer le consommateur indifférent :

$$U_x = \begin{cases} v - p_A - t(x-a)^2 \text{ si } x \text{ va à la firme A} \\ v - p_B - t(x-b)^2 \text{ si } x \text{ va à la firme B} \end{cases}$$

d'où $x^\star = \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} + \frac{a+b}{2}$ et

$$D_A(p_A, p_B) = x^\star, \;\; D_B(p_A, p_B) = 1 - x^\star$$

Modèle d'Hotelling

On peut calculer le profit des firmes de cette étape :

$$\pi_A(p_A, p_B, a, b) = p_A \left(\frac{a+b}{2} + \frac{p_B - p_A}{2t(b-a)} \right)$$

$$\pi_B(p_A, p_B, a, b) = p_B \left(1 - \frac{a+b}{2} + \frac{p_A - p_B}{2t(b-a)} \right)$$

A l'équilibre, chaque firme joue sa meilleur réponse. Des conditions de premier ordre $\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = 0$, $\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 0$ on trouve les fonctions de meilleures réponses et l'équilibre

$$p_A(a,b) = t(b-a)\frac{a+b+2}{3}$$
$$p_B(a,b) = t(b-a)\frac{4-(a+b)}{3}$$

En posant $\overline{b} = \frac{a+b}{2}$ il suit

$$p_A(a,b) = t(b-a)(\overline{b}+1)$$
$$p_B(a,b) = t(b-a)(2-\overline{b})$$

Modèle d'Hotelling

Si $t = 0$? effet de $b - a$? Plus $b - a$ est élévé, plus les firmes sont en position de monopoles locaux et donc les prix unitaires sont élévés.

Si $p_A = p_B = p \Leftrightarrow (b-a)(\bar{b}+1) = (b-a)(2-\bar{b})$

$$\Leftrightarrow (b=a)V(\bar{b}+1=2-\bar{b})$$

$$\Leftrightarrow (b=a)V(a+b=1)$$

On a donc un EN symétrique

- s'il n'y a pas de différenciation
- si les firmes sont symétriques par rapport au milieu du marché

Modèle d'Hotelling

Etape 1 : Jeu de localisation On peut calculer le profit des firmes de cette étape :

$$\Pi_A(a,b) = \pi_A(p_A(a,b), p_B(a,b), a, b)$$

$$\Pi_B(a,b) = \pi_B(p_A(a,b), p_B(a,b), a, b)$$

A l'équilibre, chaque firme joue sa meilleur réponse. Les conditions de premier ordre conduisent à

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a}(a,b) = \frac{\partial \pi_A}{\partial p_A}\frac{\partial p_A}{\partial a} + \frac{\partial \pi_A}{\partial p_B}\frac{\partial p_B}{\partial a} + \frac{\partial \pi_A}{\partial a}$$

Or $\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = 0$ condition à l'équilibre du jeu en prix pour toutes valeurs de a et b fixées.

Modèle d'Hotelling

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_A}{\partial a}(a,b) &= p_A(a,b)\left(\frac{\partial D_A}{\partial p_B}\frac{\partial p_B}{\partial a} + \frac{\partial D_A}{\partial a}\right) \\
&= p_A(a,b)\left(-\frac{2-a}{3(b-a)} + \frac{1}{2} + \frac{p_B(a,b)-p_A(a,b)}{2t(b-a)^2}\right) \\
&= \frac{p_A(a,b)}{6(b-a)}(-2+b-3a) \\
&< 0 \text{ pour tout } a, b
\end{aligned}
$$

- Si la firme B choisit $b > 0$ alors $\Pi_A(0,b) > \Pi_A(a,b)$ pour tout $a \in]0,b]$
- Par symétrie entre les deux firmes, on a aussi $\frac{\partial \Pi_B}{\partial b}(a,b) > 0$ pour tout $b > a$.
- Ainsi, si la firme A choisit $a < 1$, $\Pi_B(a,1) > \Pi_B(a,b)$ pour tout $b \in [a,1[$.

Meilleure réponse de la firme A ?

Modèle d'Hotelling

- Si $a = b = 0$ alors $\Pi_A = \Pi_B = 0$.
- Si $a = b = 1$ alors $\Pi_A = \Pi_B = 0$.
- Si $a < b$ alors la seules meilleure réponse est $a = 0$ pour la firme A et $b = 1$ pour la firme B.

Conclusion : il n'y a aucun EN pour $0 < a < b < 1$. C'est le principe de la différenciation maximale. Les firmes se différencient autant qu'elles peuvent.

Modèle d'Hotelling

- Plus je m'éloigne du centre, plus la firme i peut augmenter son prix p_i. c'est moins concurrentiel. C'est l'effet centripète.
- plus je vais vers le centre plus je gagne des parts de marchés. Effet centrifuge.
- ici, le premier effet domine...à cause de la forme de nos fonctions de transport. La forme des coûts de transports a un impact important ici : si elles sont linéaires, pas d'ENSJP.

Modèle d'Hotelling

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial a}(a,b) = \underbrace{\frac{\partial \pi_A}{\partial p_B}\frac{\partial p_B}{\partial a}}_{effet\ stratégique} + \underbrace{\frac{\partial \pi_A}{\partial a}}_{effet\ direct}$$

- effet stratégique : en me dirigeant vers mon rival il va diminuer p_B pour conserver ses parts de marchés.
- effet direct : en étant plus proche du centre j'attire plus de consommateurs
- Si une seule firme, quel effet domine ? L'effet stratégique n'existe pas et la firme va au centre !

Monopole et biens durables

Definition 5

Un bien durable est un même bien qui peut être consommé aujourd'hui ou demain, quelque soit sa date d'achat

Quel est le comportement du monopole face à ce type de biens ? Quel prix à quelle date ?

- Soit p_t le prix à la période $t = 1, 2$
- Le consommateur achète en t ou en $t + 1$ mais pas aux deux dates. Le prix de vente en t dépend donc des anticipations de p_{t+1}
- Si le monopole veut avoir des consommateurs en $t = 2$, il doit faire $p_2 < p_1$. Mais si les consommateurs voudront-ils acheter en $t = 1$?

Monopole et biens durables

Le Modèle :

- Chaque consommateur achète une unité ou zéro unité sur les deux périodes.
- L'utilité intertemporelle net des consommateurs est

$$u = \begin{cases} (1+\delta)v - p_1 \text{ si il achète en } t = 1 \\ \delta(v - p_2) \text{ si il achète en } t = 2 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

- Fonction de coût telle que $C'(q) = 0$.

Biens durables

$p_1 = p_2$ est-il optimal ?

Supposons que $p_1 = p_2$

- personne n'achète en $t = 2$ (gain à consommer sur deux périodes).
- Si le consommateur avec v achète en $t = 1$, alors $(1+\delta)v - p_1 > 0$. Donc tous ceux avec un $v' > v$ achète aussi en $t = 1$.
- Consommateur indifférent entre acheter ou non est tel que ? $v(1+\delta) - p = 0$ soit $\hat{v}(p_1) = \frac{p_1}{1+\delta}$.
- La demande est alors de $D(p) = P(V > \hat{v}(p_1)) = 1 - \frac{p_1}{1+\delta}$
- Profit : $p_1(1 - \frac{p_1}{1+\delta}) - c$

Donc $p_1 = \frac{1+\delta}{2}$, $\pi = \frac{1+\delta}{4}$

Monopole et biens durables

Si $p_2 < p_1$ est possible

A déterminer par backward induction.

- Si v achète en $t = 1$, alors $(1+\delta)v - p_1 > 0$. Donc tous ceux avec un $v' > v$ achète aussi en $t = 1$.
- Le consommateur indifférent est $\tilde{v}(p_1)$ entre consommer aux deux dates.
  - Si $v > \tilde{v}(p_1)$, v achète en $t = 1$.
  - Si $\tilde{v}(p_1) > v$, v achète en $t = 2$ ou jamais.
- Donc demande positive en $t = 2$ si $\tilde{v}(p_1) - p_2 > v - p_2 > 0$. Ce sont tous les types v pour qui $P(\tilde{v}(p_1) - p_2 > V - p_2 > 0) = P(\tilde{v}(p_1) > V > p_2) = \tilde{v}(p_1) - p_2$.

En t=2, $D_2(p_1, p_2)$ =max$\{\tilde{v}(p_1) - p_2, 0\}$,$\pi_2 = p_2(\tilde{v}(p_1) - p_2)$
La CPO conduit à $p_2(p_1) = \frac{\tilde{v}(p_1)}{2}$.

Monopole et biens durables

- On peut alors déterminer $\tilde{v}(p_1)$.
  $\tilde{v}(p_1)$ est telle que $(1+\delta)\tilde{v}(p_1) - p_1 = \delta(\tilde{v}(p_1) - p_2(p_1))$ (vu de date t=1). D'où
  $$\tilde{v}(p_1) = \frac{2p_1}{2+\delta}$$
- Comment déterminer p_1 ?

Monopole et biens durables

Si le monopole s'engage à faire $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$, alors $\hat{\pi} > \tilde{\pi}$ et
$\tilde{p}_2 < \tilde{p}_1 < \hat{p}_1 = \hat{p}_2$

Sans engagement, la concurrence entre les deux périodes réduit les prix, augmente les quantités au profit des consommateurs.
Exemple : Pour $\delta = 1$.
Sans engagement, $p_2 = 0,3, p_1 = 0,9$ et $\pi = 0,45$. Si engagement $p_1 = 1$ et $\pi = 0,5$.