Micro-économie approfondie
Chapitre 3 : Théorie de la décision[1]

Olivier Bos
olivier.bos@u-paris2.fr

[1] Bibliographie : Mas-Colell, Whinston et Green, *Microeconomic Theory*, Chapitres 3 et 6.

Introduction

- Ce que vous avez étudié jusqu'à présent:
  - Comment les agents économiques prennent-ils leurs décisions: de consommation, de production, d'offre ou de demande de travail...
  - Comment interagissent-ils sur un marché $\Rightarrow$ Analyse de l'équilibre offre-demande sur le marché des biens ou du travail.
- Raisonnement en univers certain:
  - Chacun observe la valeur exact des quantités achetées ou vendues.
  - Chacun connaît les conséquences de ses actions.

Introduction

- En réalité, la plupart des décision économiques se prennent dans un environnement incertain : les agents prennent des décisions dont les conséquences ne sont pas connues avec certitude.
- Exemple de l'assurance: sans incertain, pas de recours à l'assurance
- Exemple des décisions d'investissement: sans incertain on choisit toujours l'actif qui procure le rendement le plus haut.
- Exemples des OGM : doit-on autoriser leur mise en circulation ?

Sont concernés les décideurs publics comme privés. La formalisation des problémes de choix en incertain est fondamentale en économie.

Premier approche : la notion de bien contingent de Debreu (1959)

Plan de la séance :

- Prise de décision en environnement certain.
- Les différentes formes d'incertains.
- Présenter une théorie des choix dans l'incertain : une introduction au risque, soit l'incertain probabilisé

Prise de décision en certain

Décision en certain : Le point de départ pour tout probléme de décision individuel est un ensemble des alternatives possibles à partir duquel un agent fait ses choix. Pour le moment cet ensemble peut être n'importe quoi, noté $\mathcal{E}$.

Exemple : décision pour un métier potentiel : $\mathcal{E} = \{$étudier le droit, étudier l'économie, apprendre à jouer de la guitard$\}$. Dans la théorie du consommateur, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des choix de consommation possible.

Relations de préférences : propriétés élémentaires

Approche usuelle pour modéliser le comportement pour choix individuel :
Les goûts sont résumés par une relation de préférences, qui est sa principale caractéristique. hypothèse : les agents prennent des décision rationnelles.

On note la relation de préférences par $\succeq$. $\succeq$ est binaire sur l'ensemble des alternatives $\mathcal{E}$ et permet ainsi de comparer une paire d'alternatives $x, y \in \mathcal{E}$. On en déduit deux autres relations importantes :

- La relation de stricte préférence, $\succ$, définie par

$$x \succ y \quad \Leftrightarrow x \succeq y \text{ mais pas } y \succeq x$$

- La relation d'indifférence, $\sim$, définie par

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow x \succeq y \text{ et } y \succeq x$$

Relations de préférences : propriétés élémentaires

L'hypothèse centrale est que $\succeq$ est une relation rationnelle. Cela suppose plusieurs hypothèses :

Definition 1

La relation de préférence, $\succeq$ est dite rationnelle si elle posséde les deux propriétés suivantes :

- *La complétude : pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, il suit que soit $x \succeq y$, soit $y \succeq x$ ou les deux.*
- *La transitivité : pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}$, si $x \succeq y$ et $y \succeq z$ alors $x \succeq z$.*

Remarque : Si une relation est complète elle est aussi

- Réflexive : pour tout $x \in \mathcal{E}$ $x \sim x$.
- Symétrique pour l'indifférence : pour tout $x, y \in \mathcal{E}$, si $x \sim y$ alors $y \sim x$.

Relations de préférences : propriétés élémentaires

On représente les préférences par une fonction d'utilité. Une fonction $u(x)$ alloue à chaque élément $x \in \mathcal{E}$ une valeur numérique, classant ainsi les éléments de $\mathcal{E}$ en accord avec $\succeq$.

Definition 2

Une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ est une fonction représentant la relation $\succeq$ si

$$\forall\ (x, y) \in \mathcal{E},\ x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

Pour toute fonction strictement croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = f(u(x))$ représente les mêmes préférences que u.

Relations de préférences : propriétés élémentaires

Proposition 1

Soit $\succeq$ *une relation de préférence rationnelle représentée par une fonction d'utilité* $u : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$*; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $v : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ *est une fonction représentant* $\succeq$*;*

(ii) *il existe une application strictement croissante* $f : u(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *telle que* $v = f \circ u$*.*

Proposition 2

Une relation de préférence $\succeq$ *peut être représentée par une fonction d'utilité seulement si* $\succeq$ *est rationnelle.*

Relations de préférences : propriétés élémentaires

Axiome 1 (Monotonicité)

La relation de préférence $\succeq$ *est monotone si* $(x, y) \in \mathcal{E}$ *et* $y_i \geq x_i$ *pour tout* $i \in \{1, ..., L\}$ *implique* $y \succeq x$.

Axiome 2 (Convexité)

La relation $\succeq$ *sur* $\mathcal{E}$ *est convexe si pour tout* $x \in \mathcal{E}$ *l'ensemble* $\{y \in \mathcal{E} : y \succeq x\}$ *est convexe. Autrement dit, soient* $x, y, z \in \mathcal{E}$ *tels que pour tout* $\lambda \in]0, 1[$, $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ *alors* $z \succeq \{x, y\}$.

Axiome 3 (Continuité)

Pour toutes séquences de paires $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{+\infty}$ *telles que* $x^n \succeq y^n$ *pour tout* n, $\lim_{n\to+\infty} x^n = x$ *et* $\lim_{n\to+\infty} y^n = y$, *on a* $x \succeq y$.

Proposition 3

Supposons que la relation de préférence rationnelle $\succeq$ *soit continue, monotone et convexe. Alors il existe une fonction d'utilité continue qui représente la relation* $\succeq$.

Les différentes formes d'incertain

Il est naturel d'étendre cette démarche aux problémes de choix en environnement incertain $\Rightarrow$ beaucoup de situations économiques font intervenir de l'incertitude. Il nous faut donc développer une théorie plus spécifique.

Environnement certain : Préférences $\succeq$ sur les conséquences C.

Mais ici, les alternatives possibles (exemple : ensemble de biens) sont associées à des conséquences incertaines qui sont décrites par des probabilités. Cette représentation des alternatives incertaines est appelé loteries. Ce sont des lois de probabilités.

Environnement incertain : Préférences $\succeq$ sont définies sur l'espace des loteries $\mathcal{L} = \Delta(C)$.

Les différentes formes d'incertain

Toutes les situations présentant de l'incertain ne sont pas également incertaines. On distingue traditionnellement le risque de l'incertain (Knight, 1921) :

- Risque ?
  Exemple : jeux de poker, risque de maladie génétique; on peut calculer les probabilités des différents événements aléatoires.
- Incertain ?
  Exemple : faut-il ou non autoriser les OGM ? Le principe de précaution est un principe de droit mais qui se justifie par certains modéles de théorie de la décision en incertain.

Les différentes formes d'incertain

Deux types d'incertain :

- On peut éventuellement utiliser des probabilités subjectives, probabilités qu'on se fabrique soit même, à partir de sa propre information, observation, expérience... Ces probabilités peuvent s'écarter fortement des probabilités objectives. Néanmoins, on pourra utiliser les mêmes raisonnements pour prendre ses décisions que dans les situations risquées.
- Incertitude est totale : la situation est tellement complexe qu'on ne peut même pas décrire l'ensemble des conséquences possibles des événements, et encore moins les probabiliser.

Prise de décision en incertain : matrice d'information

On peut résumer une situation d'incertain par 3 éléments :

- Les états de la nature = situations qui peuvent se produire
- Les actions réalisables par l'agent étudié
- Les conséquences des actions pour un état de la nature donné

Prise de décision en incertain

Nous supposerons que:

- Le décideur connaît tous les états de la nature possibles.
- Le décideur connaît les conséquences de ses actions dans chaque état de la nature ⇒ Dans la grande majorité des cas, ces conséquences pourront se ramener à des sommes monétaires.
- Le décideur est capable d'attribuer une probabilité de réalisation à chaque état de la nature ⇒ Nous sommes dans une situation de risque ou d'incertain probabilisé.

Exemples de loteries

Premier critère de décision qui vient à l'esprit pour l'évaluation d'une alternative ayant des conséquences monétaires incertaines : l'espérance mathématique ou valeur actuarielle :

$$\sum_i p_i x_i$$

Exemples de loteries

Deux états de la nature : s_1 pas de sinistre avec proba. $1 - p$ et s_2 un sinistre d'un montant L se produit avec proba. p.
L'agent a une richesse initiale w_o (certaine). Il a trois actions (décisions) possibles :

- ne rien faire, notée D_o
- prendre une assurance couvrant tout le risque, notée D_1

On considère les décisions comme des fonctions qui associent à chaque état de la nature une conséquence, soit ici un niveau de richesse :

- D_o correspond à associer à s_1 la conséquence w_o et à s_2 $w_o - L$
- D_1 correspond à associer à s_1, s_2 la conséquence $w_o - \pi$ où π est la prime d'assurance.

Inconvénients de l'espérance mathématique

- Pas de prise en compte de l'attitude vis-à-vis du risque du décideur – Conséquences monétaires uniquement
- Paradoxe de Saint-Pétersbourg

Règle du Jeu: On tire à pile ou face et le jeu se poursuit jusqu'à ce que pile apparaisse. Au 1^{er} lancé, le joueur gagne 2 euros, la somme gagnée est doublée à chaque lancé.

La valeur de cette loterie en terme d'espérance de gain est infinie.

Paradoxe: Personne n'est prêt à payer une somme d'argent importante pour jouer à ce jeu.

Pb : Quand on compare deux loteries on ne s'intéresse pas seulement à leurs gains espérés mais aussi à leur risque.

Inconvénients de l'espérance mathématique

En 1738, Daniel Bernoulli (1700 –1782) propose d'intégrer le fait que les agents ont une utilité (satisfaction) marginale décroissante pour la monnaie et évaluent un pari par l'espérance de l'utilité des différentes conséquences.

Par exemple, l'espérance mathématique du logarithme du gain.

Critique de la solution de Bernoulli

Pourquoi ln ? (ad hoc, il existe une infinité de fonctions croissantes à taux décroissant)

- Pourquoi la même forme pour chaque individu ?
- Pourquoi la décision doit-elle être fondée sur la valeur espérée des utilités ?
- La valeur espérée est justifiée à long terme, si le pari est répété un grand nombre de fois. Mais pourquoi peut-on l'appliquer si l'individu participe une seule fois au jeu ?

1944 : von Neumann et Morgenstern fournissent une axiomatique rigoureuse généralisant la solution proposée par Bernoulli.

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Nous venons de développer une façon de modéliser les alternatives risquées. Il nous faut désormais étudier la prise de décision à partir des préférences sur ces alternatives risquées.

Nous concervons donc l'axiome de rationnalité sur les préférences, vu pour la décision en certain :

Axiome 4 (Pré-ordre total)

La relation de préférence $\succeq$ est un pré-ordre total :

- *Complétude. Pour tout $L, L' \in \mathcal{L}$ on a $L \succeq L'$ ou $L' \succeq L$ (ou les deux).*
- *Transitivité. Pour tout $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, si $L \succeq L'$ et $L' \succeq L''$ alors $L \succeq L''$.*

Deux autres axiomes ont été introduit pour pouvoir développer une théorie de la prise de décision avec des préférences définies sur des loteries. Le premier est un axiome de continuité, comme l'axiome 3 sur la continuité des préférences dans le cas certain.

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Rappels sur les mixages de loteries.

Axiome 5 (Continuité)

Pour toute loteries $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ *telles que* $L \succeq L' \succeq L''$, *il existe* $\alpha \in [0,1]$, $\alpha L + (1-\alpha)L'' \sim L'$.

La continuité signifie que si on modifie de ε les proba. cela ne changent pas l'ordre sur les loteries.

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Notre second axiome donne encore plus de structure à U. C'est l'axiome central du modèle EU :

Axiome 6 (Indépendance)

Pour tout $L, L'', L''' \in \mathcal{L}$ *et tout* $\alpha \in]0,1]$,

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

.

Mixer deux loteries avec une troisième, n'affecte pas l'ordre des préférence sur les deux premières. L'ordre sur les préférences est indépendant du mixage !

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Exemple : Soit deux loteries L et L' telles que $L \succeq L'$. Soit $\alpha = 1/2$ et une troisième loterie L''.

- Interprétation de la loterie $1/2L + 1/2L''$. Je lance une pièce. Avec proba 1/2 je fais *face* et je tire L; avec proba 1/2 je fais *pile* et je tire L''.
- Interprétation de la loterie $1/2L' + 1/2L''$. Je lance une pièce. Avec proba 1/2 je fais *face* et je tire L'; avec proba 1/2 je fais *pile* et je tire L''.
- En faisant face, la loterie $1/2L + 1/2L''$ est au moins aussi bonne que la loterie $1/2L' + 1/2L''$.
- En faisant pile, elles sont équivalentes.
- $L \succeq L' \Leftrightarrow 1/2L \succeq 1/2L'$ et $L'' \sim L'' \Leftrightarrow 1/2L'' \sim 1/2L''$. D'où $L \succeq L' \Leftrightarrow 1/2L + 1/2L \succeq 1/2L' + 1/2L''$

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Supposons que l'agent préfère L à L'. Comment classe-t-il les loteries composées?

Si un événement de probabilité $(1 - \alpha)$ se produit, alors il obtient la loterie L'' avec les deux loteries composées. Si l'évènement de proba α se produit, il obtient la loterie L avec la première loterie composée, et L' avec la deuxième. Par conséquent, il préfère la première loterie à la deuxième.

La logique de cet axiome peut sembler intuitive. On va voir ensuite que de nombreuses études expérimentales (le paradoxe d'Allais) ont montré que la plupart des décideurs font leur choix en contradiction avec cet axiome.

Hypothèses de von Neumann et Morgenstern

Remarque : il n'y a aucune raison qu'un consommateur qui préfère un bien à un autre conserve ses préférences si on y ajoute une quantité d'un troisième bien.

Je préfère les riz aux pâtes, mais je préfèrais les pâtes avec de la sauce tomate au riz avec de la sauce tomate. Autrement dit : la loterie L'' doit être non pertinente dans le choix réalisé (au contraire du consommateur) car on profite pas des loteries L et L' indépendamment de la loterie L''.

L'axiome d'indépendance est foncièrement lié à la représentation des préférences sur des loteries par une fonction d'utilité qui prend la forme d'utilité espérée.

Théorème de von Neumann et Morgenstern

Si la relation de préférence $\succeq$ sur l'espace des loteries $\mathcal{L}$ est rationnelle, continue, et vérifie l'axiome d'indépendance, alors elle admet une représentation sous la forme d'utilité espérée de VNM.

Autrement dit, on peut assigner des valeurs $u(c)$ aux différentes conséquences $c \in C$ de sorte que pour toutes loteries $L = (p_1, ..., p_C)$ et $L' = (p'_1, ..., p'_C)$ on a

$$L \succeq L' \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{c \in C} p_c u(c)}_{U(L)} \leq \underbrace{\sum_{c \in C} p'_c u(c)}_{U(L')} .$$

Remarque : Si L est une loterie associée à une conséquence c avec certitude alors $U(L) = u$. On l'appelle espérance d'utilité car elle peut être vue comme l'espérance des valeurs u_i pour chaque conséquence c_i.

Cette espérance d'utilité est linéaire dans les probabilités $(p_1, ..., p_c)$.

Théorème de von Neumann et Morgenstern

Proposition 4

Une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *à la forme utilité espérée de VNM si et seulement si elle est liénaire, c'est-à-dire*

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

pour toutes loteries $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, ..., K$ *et* $(\alpha_1, ..., \alpha_K) \geq 0; \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1.$

Le modèle dominant de décision dans le risque est le modèle d'espérance d'utilité (Von Neumann et Morgenstern, 1947), utilisé dans la plupart des modèles économiques et en finance.

Le modèle d'espérance d'utilité VNM

Proposition 5 (Cardinalité)

Soit $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'utilité espérée de VNM pour la relation de préférence $\succeq$ sur $\mathcal{L}$. La fonction $V : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ est une autre fonction d'utilité espérée de VNM pour $\succeq$ si et seulement si il existe $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$V(L) = \beta U(L) + \gamma \text{ pour tout } L \in \mathcal{L}.$$

Exemple (suite) : Le comportement d'une décideur EU est entièrement caractérisé par la fonction u.Dans l'exemple précédent

$$U(D_0) = pu(w_o) + (1-p)u(w_o - L) \text{ et } U(D_1) = u(w_o - \pi)$$

L'agent décide de s'assurer si $U(D_1) > U(D_o)$ ce qui dépend entièrement de u. u est donc une application $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et est appelée une fonction d'utilité de Bernouilli. Les seules restrictions nécessaires sur u est qu'elle soit continue et croissante. Pour cela, il suffit que les axiomes de monotonie et de continuité des préférences soient vérifiés.

Conséquences monétaires

Loterie = variable aléatoire représentée par une fonction de répartition F. Par exemple, la loterie à trois conséquences monétaires possibles suivantes :

Dans ce cadre une loterie (fonction de répartition) F est évaluée par l'agent à l'aide d'une fonction d'utilité espérée de VNM ayant la forme

$$\begin{aligned} U(F) &= \int_C u(c)dF(c) \\ &= \int_C u(c)f(c)dc \text{ si la densité } f \text{ existe.} \end{aligned}$$

Bien distinguer la fonction d'utilité espérée $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des loteries, de la fonction $u : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ définie sur des conséquences certaines (fonction d'utilité de Bernoulli ou appelée à tort de VNM.).

L'axiomatique de VNM n'impose aucune restriction sur la forme de la fonction u, mais on suppose en générale que u est croissante.

Le paradoxe d'Allais (1953)

La plus forte critique à l'espérance d'utilité de VNM.

- Il est proposé à des sujets de choisir entre les loteries suivantes L_1 =(5M, 0; 1M avec certitude; 0, 0) et $L_2 = (5M, 0.10; 1M, 0.89; 0, 0.01)$.
- Puis entre les loteries suivantes $L'_1 = (5M, 0; 1M, 0.11; 0M, 0.89)$ et $L'_2 = (5M, 0.10; 1M, 0; 0M, 0.90)$.

La plupart des sujets choisissent L_1 et L'_2. Or cela viole l'axiome d'indepéndance. L'axiome d'indépendance conduit soit à (L_1, L'_1) ou à (L_2, L'_2)

Incertain non probabilisé

On a déjà vu que Knight (1921) distinguait

- Risque : il existe des probabilités objectives (lancé de dés, d'une pièce de monnaie, tirage d'un numéro sur une roulette ou dans une urne, ...);
- Incertain : pas de probabilité objective (résultats d'un match de football ou d'une course de chevaux, évolution d'un prix, occurrence d'une catastrophe naturelle, ...).

Chez Von Neumann et Morgenstern (1944) : hypothèse implicite que la situation peut toujours être représentée par des probabilités objectives parfaitement définies et connues sans ambiguïté par le preneur de décision ($\rightarrow$ risque).

Chez Savage (1954) et Anscombe et Aumann (1963) : généralisation de la forme d'utilité espérée sans probabilité objective (construction de probabilités subjectives / croyances uniques).

Incertain non probabilisé

Théorie de l'utilité espérée subjective : (sous certaines conditions) les individus se comportent comme s'ils maximisaient une fonction d'utilité espérée fondée sur des croyances probabilistes pour les différents états du monde possibles et pour des utilités (de Bernoulli) sur les différentes conséquences possibles.

Le monde réel est complexe. Quel est la probabilité que Fukushima se produise ? Cette incertitude ne peut être décrite par le monde de VNM. Désormais le décideur ne connaît pas la loi de probabilité sur l'ensemble S des états de la nature, ce qui est le cas dans la plupart des situations économiques.

La première approche est de réduire le problème en incertain à un problème de décision dans le risque : l'idée est que si les agents ne connaissent pas les probabilités, ils peuvent quand même en former, de façon subjective soit en ramenant toute situation d'incertain à une situation de risque *subjectif* $\Rightarrow$ tous les événements sont probabilisés mais leurs probabilités peuvent différer d'un décideur à un autre.