Microéconomie approfondie
Chapitre 2 : Jeux sous forme normale
jeux statiques à information complète

Olivier Bos
olivier.bos@u-paris2.fr

Introduction

A nouveau, qu'est-ce que la théorie des jeux ? Une illustration.

Dans l'introduction du cours, nous avons définit l'Economie Industrielle comme "l'économie de la concurrence imparfaite".

La concurrence imparfaite implique, habituellement, des intéractions stratégiques.
L'action d'une firme (choix de prix, de quantité, de qualité du produit, de R&D) a des conséquences importantes sur le profit de ses rivales.

Que peut-on prédire a propos d'une industrie dans laquelle les firmes intéragissent stratégiquement ?

- En concurrence parfaite, qui suppose qu'il n'y a pas d'intéraction stratégique, nous utilisons un concept d'équilibre : l'équilibre walrasien.
- Peut-on trouver un concept de solution avec des intéractions stratégiques ?

Introduction

La théorie des jeux, qui peut être définie comme l'étude des problèmes de décision entre plusieurs agents, a été utilisée pour définir de tels concepts de solutions. On parle parfois de "théorie de la décision intéractive".

Plan du chapitre

- Définition d'un jeu sous la forme normale et exemples;
- Un premier concept de solution : l'équilibre en stratégie dominante;
- Un concept moins restrictif : l'équilibre de Nash;
- Existence d'un équilibre de Nash;
- Extension mixte d'un jeu et stratégies mixtes;
- Stratégie maximin et jeux à somme nulle;
- Elimination itérative des strategies dominées.

Jeux sous forme normale

Définition

Un jeu $\Gamma = (\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ sous forme normale ou stratégique est décrit par :

- L'ensemble des joueurs $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$;
- L'espace des stratégies pures ou des actions pour chaque joueur i est noté S_i, où chaque joueur i choisit la stratégie s_i, élément de S_i. Exemples : $S_i = \mathbb{R}_+$, $S_i = \{a, b\}$.
- Une fonction de paiement (d'utilité ou de gain) $u_i(s_1, ..., s_n)$ pour chaque joueur i, telle que $u_i : S_1 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$, lorsque les joueurs jouent les stratégies $(s_1, ..., s_n)$.
  L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de celle des autres (ses préférences sont définis sur S et non sur S_i)

On appel issue du jeu ou profil de stratégies, la liste $(s_1, ..., s_n) \in \Pi_{i=1}^{n} S_i$.

Exemple : le duopole de Cournot

Rappels à propos de la concurrence oligopolistique :

- Peu de firmes.
- Les actions/décisions (prix, quantités, publicité) prises par une firme affectent les profits de ses rivaux.
- Quand une firme choisit son action, elle doit anticiper celles de ses rivaux.
- Dans un cadre dynamique, la firme doit non seulement anticiper les actions de ses rivaux aujourd'hui mais aussi pour les périodes futurs.
- La nouveauté ici : il y a des intéractions stratégiques
- Dans un monopole ou CPP il n'y avait aucune intéraction stratégique :
  - Aucun rival pour le monopole;
  - En CPP, le choix de chaque rme en (prix, quantite) n'a aucun impact sur le prix et la quantite du marche, et donc sur le payo s de ses rivaux;
  - On suppose ici que les consommateurs sont parfaitement competitifs mais pas les rmes.

Un cadre naturel pour étudier ces intéraction stratégiques : les modèles de théorie des jeux.

Exemple : le duopole de Cournot

Supposons que les firmes choisissent leur niveau de production.

Hypothèses :

1. $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1, 2$, coût marginal constant, coût fixe nul.
2. Fonction de demande inverse linéaire : $p(Q) = a - bQ$ où $Q = q_1 + q_2$, soit encore $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$, avec $b > 0, a > c_i$.
3. Fonction de profits de la firme i :

$$\begin{aligned}
\pi_i(q_1, q_2) &= p(q_1 + q_2)q_i - c_i(q_i) \\
&= a - b(q_1 + q_2) - c_i q_i \\
&= b(\frac{a}{b} - (q_1 + q_2) - \frac{c_i}{b}) \\
&= b(\theta_i - (q_1 + q_2)) \text{ avec } \theta_i = \frac{a - c_i}{b} > 0.
\end{aligned}$$

Exemple : le duopole de Cournot

Neutralité pour le risque, on peut définir la fonction d'utilité comme $u_i(q_1, q_2) \equiv \pi_i(q_1, q_2)$. La forme normale est donc déterminée ici :

- Les joueurs : $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;
- Ensemble de stratégies/actions : tous les niveaux de productions/quantités possibles $\mathbb{R}_+$;
- Fonctions de payoffs (de profits) :

$$u_i(q_1, q_2) = b(\theta_i - (q_1 + q_2)) \text{ avec } \theta_i = \frac{a - c_i}{b}.$$

Jeux finis

Un jeu Γ sous forme normale $(\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis. Le duopole de Cournot est-il un jeu fini?

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

J1/J2	...	s_2	...
...	...	...	...
s_1	...	$u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)$	...
...	....	...	...

On parle parfois de représentation matricielle d'un jeu fini à 2 joueurs.
Conventions :

- Le joueur 1 est en ligne, le joueur 2 en colonne.
- Paiement : (joueur ligne, joueur colonne)

Jeux finis

Trois joueurs (2 actions par joueur) :

J1/J2	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3)$	$u(s_1, s_2', s_3)$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3)$	$u(s_1', s_2', s_3)$

J3; s_3

J1/J2	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3')$	$u(s_1, s_2', s_3')$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3')$	$u(s_1', s_2', s_3')$

J3; s_3'

avec $u(.,.,.) = (u_1(.,.,.), u_2(.,.,.), u_3(.,.,.))$.

Exemple : Le dilemme du prisonnier

- Deux joueurs : prisonnier 1 et prisonnier 2; Les deux sont suspectés d'avoir commis (ensemble) un crime
- Stratégies du prisonnier i :
  - C \cooperer", ie temoigner contre le prisonnier j
  - NC \ne pas cooperer", rester silencieux.

  Donc $S_1 = S_2 = \{C, NC\}$;
  $S = \{(C, NC), (NC, C), (C, C), (NC, NC)\}$. Un exemple de profil de stratégies est (C, C).
- Fonction de paiement du joueur 1 :

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } s_1 = s_2 = NC \\ 0 & \text{si } s_1 = C, s_2 = NC \\ -10 & \text{si } s_1 = NC, s_2 = C \\ -6 & \text{si } s_1 = s_2 = C \end{cases}$$

- Paiement symétrique pour le joueur 2.

Exemple : Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier est-il un jeu fini ?

J1/J2	NC	C
NC	-1, -1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

Chaque joueur gagne à coopérer quelle que soit l'action de l'autre joueur : c'est un dilemme de rationalité individuelle/collective.

Remarque 1 : Sous-entendus du modèle :

- Les décisions des joueurs sont indépendantes;
- Les deux joueurs connaissent le jeu et jouent une seule fois.

Remarque 2 : le dilemme du prisonnier a de multiples applications en IO. Ex: la concurrence en prix avec de produits homogènes.

Exemple 2: dilemme du prisonnier

Reprendre le duopole de Cournot avec $c_1 = c_2 = a = 4$ et $b = 1$ en supposant que chaque firme i a uniquement le choix entre la quantité $q_i = 1$ (produire beaucoup) et la quantité $q_i = \frac{3}{4}$ (produire peu)
Montrer que ce jeu est équivalent au jeu du dilemme du prisonnier de la figure ci-dessous :

J1/J2	produire beaucoup	produire peu
produire beaucoup	(-2, -2)	(-1,315, -1,75)
produire peu	(-1,75, -1,315)	(1,125, 1,125)

Stratégies dominantes

L'action s_i du joueur i domine faiblement son action s_i^0 si :

$$\forall s_{\ i} \in S_{\ i}, \;\; u_i(s_i, s_{\ i}) \geq u_i(s_i^0, s_{\ i})$$
$$\exists s_{\ i} \text{ tel que } u_i(s_i, s_{\ i}) > u_i(s_i^0, s_{\ i}).$$

L'action s_i du joueur i domine strictement son action s_i^0 si :

$$\forall s_{\ i} \in S_{\ i} \;\; u_i(s_i, s_{\ i}) > u_i(s_i^0, s_{\ i})$$

Une action est strictement/faiblement dominante si elle domine strictement/faiblement toutes les autres actions.

Contre-exemple.

J1/J2	G	D
H	(2,0)	(1,0)
M	(2,2)	(0,0)
B	(1,0)	(0,2)

Dans le jeu précedent H domine faiblement M, M domine faiblement B et H domine strictement B. Aucun ordre de dominance ne peut être établi pour le joueur 2.

Exemple : retour au dilemme du prisonnier

J1/J2	NC	C
NC	-1,-1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

- Quoi que face J2, J1 choisit toujours C
- C est une stratégie dominante pour J1
- Pour J2 ?

Equilibre en stratégies dominantes

On peut définir notre premier concept d'équilibre :

Definition 1 (Equilibre en stratégies dominantes)

Un profil de stratégies $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout joueur* i*,* $s_i^\star$ *est une stratégie dominante.*

Formellement $\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall s_{\ i} \in S_{\ i}, \forall s_i^0 \in S_i,$
$u_i(s_i^\star, s_{\ i}) > u_i(s_i^0, s_{\ i})$.

Revenons au dilemme du prisonnier.

J1/J2	NC	C
NC	-1,-1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

- C stratégie dominantes pour les deux joueurs
- NC pas une stratégie dominante pour J1 et comme J2
- Conclusion : le seul équilibre en stratégies dominantes est (C, C).

Equilibre en stratégies dominantes

- Pareto Optimum ?

Definition 2

Un optimum de Pareto est un profil d'action $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *qui n'est pas Pareto-dominé, c'est-à-dire tel que pour tout autre profil d'action* $(s_1, ..., s_n)$,

1. *tous les joueurs préfèrent faiblement* $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *à* $(s_1, ..., s_n)$ *:*

$$\forall i, \quad u_i(s_1^\star, ..., s_n^\star) \geq u_i(s_1, ..., s_n)$$

2. *Il existe au moins un joueur qui préfère strictement* $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *à* $(s_1, ..., s_n)$ *:*

$$\exists j, \quad u_j(s_1^\star, ..., s_n^\star) > u_j(s_1, ..., s_n)$$

Si $(s_1^\star, ..., s_1^\star)$ est un OP, toute modification de ce profil entraîne une baisse de gain d'au moins un des joueurs.

- Ils seraient mieux en faisant de la collusion...

Exemples.

La bataille des sexes

H/F	O	F
O	1,2	0,0
F	0,0	2,1

Jeu de coordination

J1/J2	a	b
a	2,2	0,0
b	0,0	1,1

Exemples de jeux à somme nulle (stricte compétition)

Matching pennies

J1/J2	P	F
P	-1,1	1,-1
F	1,-1	-1,1

- Joueurs 1 et 2
- Ensemble des stratégies $= \{P, F\}$
- Paiements

$$u_1(p_h, p_b) = \begin{cases} -1 \;\; si \;\; (P,P) \\ 1 \;\; si \;\; (P,F) \\ 1 \;\; si \;\; (F,P) \\ -1 \;\; si \;\; (F,F) \end{cases}$$

Exemples de jeux à somme nulle (stricte compétition)

Feuille, papier, ciseaux

J1/J2	F	P	C
F	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
P	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Equilibre en stratégies dominantes

- Les stratégies dominantes sont rares;
- Une stratégie dominante est la meilleure option contre n'importe quelles stratégies des autres. Par ailleurs, un joueur rationnel
  - ne jouera jamais de strategie strictement dominee;
  - jouera a coup sur une strategie strictement dominante;
  - ne perd rien a jouer une strategie faiblement dominante.
- En général : Une stratégie peut être préférée face à certaines stratégies des rivaux, mais elle n'est pas la meilleure option face à d'autres stratégies. Par exemple : dans le jeu de coordination, aller à l'opéra est préféré si l'autre y va, mais pas s'il n'y va pas.

Equilibre de Nash en stratégies pures

Que peut-on dire quand il n'y a pas de stratégies dominantes ? Comment fait-on pour aller au-delà des restrictions de notre concept d'équilibre ? John Nash y répond pour nous (1951) : Concept de stabilité : situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement (individuellement) de sa stratégie.

Definition 3

On appelle meilleure réponse de i aux stratégies s_{-i} une stratégie $MR_i(s_{-i})$ telle que : $MR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$

Definition 4

Un profil de stratégies pures $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ est un équilibre de Nash d'un jeu $\Gamma = (\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ si pour chaque joueur i, $s_i^\star$ est une meilleure réponse à $s_{-i}^\star$ c'est-à-dire

$$u_i(s_i^\star, s_{-i}^\star) \geq u_i(s_i, s_{-i}^\star) \;\; \forall s_i \in S_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

Equilibre de Nash en stratégies pures

Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnellement étant données leurs anticipations qui sont auto-réalisatrices.

Proposition 1

- *Si l'action s_i est strictement dominée alors s_i n'est jamais jouée à un équilibre de Nash;*
- *Si l'action s_i est strictement dominante pour tout $i \in \mathcal{N}$ alors $s = (s_1, ..., s_n)$ est l'unique équilibre de Nash*
- *Si l'action s_i est faiblement dominante pour tout $i \in \mathcal{N}$ alors $s = (s_1, ..., s_n)$ est un équilibre de Nash (pas nécessairement le seul, mais les autres EN ne peuvent pas être strictes)*

Preuve ? Par définition de l'équilibre de Nash.

Exemples

Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

Deux joueurs peuvent se partager 2 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2, où $s_1, s_2 \in [0, 2]$. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité s_i qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien. Equilibres de Nash en stratégies pures ? Lesquels sont Pareto optimaux ? L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est l'ensemble des couples $(s_1, s_2) \in [0, 2]^2$ tels que $s_1 + s_2 = 2$.

Concrètement, comment se coordonner vers un équilibre dans la situation précédente ? Thomas Schelling (1921–), prix Nobel (en 2005 avec Robert Aumann), a développé la notion de point focal : équilibre que les joueurs ont tendance à jouer lorsqu'ils ne peuvent pas communiquer car il leur semble à tous les deux le plus “naturel”, spécial, ou pertinent (en faisant référence, par exemple, à une culture commune).

Illustration : Accords internationaux et bien public

Soient n Etats qui négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est donné par

$$u_i(s_1, ..., s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple $v(x) = ln(x)$.

Chaque joueur a une action dominante c'est-à-dire telle que

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \Leftrightarrow v'(s_i) = 1.$$

On a donc un unique équilibre de Nash, symétrique : chaque joueur choisit l'action dominante $s_i^\star$ qui vérifie $v'(s_i^\star) = 1$. Si $v(x) = ln(x)$ alors $s^\star = (1, ..., 1)$.

Illustration : Accords internationaux et bien public

Quel profil d'actions $\bar{s} = (\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n)$ maximise le bien-être social ?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, ..., s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

tel que pour tout k $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial s_k}(\bar{s}) = 0 \Leftrightarrow v^{0}(\bar{s}_k) = n$.

L'équilibre de Nash est ici Pareto dominé : $v^{00} < 0$, donc v^{0} est décroissante ce qui induit que $s_i^{\star} > \bar{s}_i$. A l'équilibre, les Etats polluent trop!

Illustration : Accords internationaux et bien public

Comment atteindre équilibre et efficacité sociale ? En imposant une taxe à polluer!

$$u_i(s_1, ..., s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j + -\theta s_i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \Leftrightarrow v'(s_i) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta\frac{n-1}{n}.$$

L'équilibre de Nash est équivalent à l'optimum social si :

$$1 + \theta\frac{n-1}{n} = n \text{ i.e., } \theta = n.$$

Existence de l'Equilibre de Nash en stratégies pures

Illustration : Concurrence à la Cournot

Les firmes choisissent leur niveau de production.

Hypothèses :

1. $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1, 2$.
2. Fonction de demande $p(Q) = a - bQ$ où $Q = q_1 + q_2$

Illustration : Concurrence à la Cournot

Définition du jeu ici :

- les joueurs : les firmes
- Ensemble de stratégies/actions : toutes les niveaux de productions/quantités possibles $q_i \in \mathbb{R}_+$
- Fonctions de payoffs (de profits) :

$$\pi_i(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_i - C_i(q_i)$$

L'équilibre de Nash existe t-il ?
Une paire $\{q_1^c, q_2^c\}$ est un équilibre de Cournot (équilibre de "Nash en quantité") si :

1. Etant donné $q_2 = q_2^c$, q_1^c résout $\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2^c)$;
2. Etant donné $q_1 = q_1^c$, q_2^c résout $\max_{q_2} \pi_2(q_1^c, q_2)$;

Autrement dit, étant donné que la rivale de i joue sa stratégie de Cournot, j n'a pas intérêt à dévier. Elle ne peut pas augmenter son profit en changeant q_j^c pour une autre valeur.
Le prix à l'équilibre de Cournot est donné par $p^c = a - b(q_1^c + q_2^c)$.

Illustration : Concurrence à la Cournot

Pour obtenir l'équilibre, on réalise une analyse en termes de fonctions de meilleurs réponses. Pour la firme 1, son payoff étant donné q_2 :

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1$$

CPO : $a - bq_2 - 2bq_1^c - c_1 = 0$ On a toujours Rm=Cm.

L'équilibre existe t-il (à nouveau) et sommes-nous à l'optimum ?π_1 strictement concave en q_1? CSO: $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) = -2b < 0$

Illustration : Concurrence à la Cournot

Fonction de réaction de la firme 1 ?

$$q_1 = R_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a \quad c_1}{2b} - \frac{1}{2}q_2 \text{ si } q_2 \leq \frac{a \quad c_1}{b} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Doit-on calculer $R_2(q_1)$? Par symétrie...

$$q_2 = R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a \quad c_2}{2b} - \frac{1}{2}q_1 \text{ si } q_1 \leq \frac{a \quad c_2}{b} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Illustration : Concurrence à la Cournot

Remarquez que les fonctions de réactions sont décroissantes : si ma rivale augmente sa quantité, alors je diminue la mienne ! Les quantités sont des substituts stratégiques.

Equilibre ? Il nous faut résoudre le système $q_1^c = R_1(q_2^c)$ et $q_2^c = R_2(q_1^c)$. On obtient (q_1^c, q_2^c).

$$\begin{cases} q_1^c = \frac{a \quad 2c_1 + c_2}{3b} \\ q_2^c = \frac{a \quad 2c_2 + c_1}{3b} \end{cases}$$

A l'équilibre la quantité totale offerte est $Q^c = q_1^c + q_2^c = \frac{a \quad c_1 \quad c_2}{3b}$.

Soit encore $p^c = a - bQ^c = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$, $\pi_i^c = (p_i^c - c_i)q_i^c = b(q_i^c)^2$.

Jeux symétriques

Definition 5

Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ et $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ pour tout $a, b \in A$.

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont le coût marginal constant $c_1 = c_2 = c$. Dans ce cas, quel est l'équilibre de Nash symétrique ?

Proposition 2

Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique.

Preuve. Si le jeu est symétrique alors on a clairement $MR1(a) = MR2(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $f : A \to A$ vérifie les conditions du théorème de Brouwer, il existe $a^\star$ t.q. $a^\star \in f(a^\star)$. Le profil de stratégies pures $(a^\star, a^\star)$ est donc un équilibre de Nash car $a^\star$ est une meilleure réponse à $a^\star$ pour les deux joueurs ($a^\star \in MR_i(a^\star)$, $i = 1, 2$).

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Qui est Bertrand ?Joseph Bertrand (1822 – 1900) est un mathématicien français qui propose en 1883 une analyse de l'oligopole (sous certaines conditions) qui n'est autre qu'un équilibre de Nash dans un environnement où la compétition se fait par les prix.
Bien avant Nash !

Soient 2 firmes avec des coûts marginaux c_i, $i = 1, 2$.
On note $q(p)$ la demande totale inverse pour le bien homogène produit par les deux firmes telle que $q^{0}(.) < 0$.

Deux hypothèses :

1. Les consommateurs achètent toujours à la firme la moins chère (bien homogène).
2. Si deux vendeurs proposent le même prix de vente, les consommateurs partagent leur demande 50/50 (tie breaking rule).

Illustration : la concurrence à la Bertrand

On note $q_i(p_1, p_2)$ la demande de la firme i :

$$q_i(p_1,p_2) = 0 \text{ si } p_i > p_j$$
$$q_i(p_1,p_2) = \frac{q(p)}{2} \text{ si } p_i = p_j$$
$$q_i(p_1,p_2) = q(p_i) \text{ si } p_i < p_j$$

Définition du jeu ici :

- les joueurs : les firmes
- Ensemble de stratégies/actions : $p_i \in \mathbb{R}_+$
- Fonctions de payoff (de profit) :

$$\pi_i(p_1,p_2) = (p_i - c_i)q_i(p_1,p_2)$$

L'équilibre de Nash existe t-il ici ?

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Une paire $\{p_1^b, p_2^b\}$ est un équilibre de Bertrand (équilibre de "Nash en prix") si :

1. Etant donné $p_2 = p_2^b$, p_1^b résout $\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2^b)$;
2. Etant donné $p_1 = p_1^b$, p_2^b résout $\max_{p_2} \pi_2(p_1^b, p_2)$;

Supposons que $c_1 = c_2 = c$. Quel est l'équilibre ?

- Lemme 1 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $p_1 = p_2 < c$.
- Lemme 2 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $p_1 < \min\{p_2, c\}$.
- Lemme 3 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $c < p_1 = p_2 = p$.
- Lemme 4 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $c < p_1 < p_2$.

Illustration : la concurrence à la Bertrand

La seule possibilité restante est $p_1 = p_2 = c$. Est-ce un EN?

- Une déviation en proposant un prix plus faible n'est pas profitable, puisque la firme ferait un profit négatif.
- Une déviation en proposant un prix plus haut n'est pas non plus strictement profitable, puisque les firmes feraient un profit nul avant et après la déviation.
- Donc $p_1 = p_2 = c$ est l'unique EN.

Dans une concurrence à la Bertrand avec des biens homogènes et des coûts marginaux identiques et constants, les firmes ne font aucun profit et propose un prix à l'équilibre qui est égal au coût marginal.

Intuition : les firmes ont des incitations fortes à proposer un prix plus faible que leurs rivales aussi longtemps que les prix excèdent le Cm. En réduisant son prix à celui de sa rivale moins 1 centime, une firme s'approprie tout le marché et en exclue sa rivale.

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Supposons désormais que les Cm soient différent entre les firmes : $c_1 < c_2$. Quel sera l'équilibre de Nash ?

- En suivant le même raisonnement que précédemment, on peut démontrer qu'il ne peut pas y avoir d'offre pour $p < c_1$ (la firme fait des pertes) et pour $p > c_2$ (déviation $p - \varepsilon$ strictement profitable pour les deux firmes : undercut).
- On a un continuum d'EN :
  - la rme 2 propose un prix $c_1 < p_2 \leq c_2$.
  - la rme 1 propose un prix $p_1 = p_2 - \varepsilon$.

  La firme 1 obtient tout le marché.
- Lequel de ces équilibres est le plus probable ?

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Les équilibres où $c_1 < p_2 < c_2$ et $p_1 = p_2 - \varepsilon$ ont de très mauvaises propriétés :

- Supposons que la firme 1 tremble lorsqu'elle fixe son prix.
- Plus précisémment, supposons que F1 fasse $p_1 = p_2 - \varepsilon$ avec une probabilité $1 - \eta$ et $p_1 = p_2 + \varepsilon$ avec probabilité η où η est arbitrairement très petite, probabilité qu'elle soit distraite ou fasse des erreurs quand elle fixe son prix.
- Dans ce cas, le profit de la firme 2 est

$$\mathbb{E}\pi_2(p_2) = (1-\eta).0 + \eta(p_2 - c_2)q(p_2) = \eta(p_2 - c_2)q(p_2) < 0$$

- S'il existe une faible proba. d'erreur, fixer $p_2 < c_2$ est une très mauvaise idée pour la firme 2. Elle devrait proposer $p_2 \geq c_2$.

Au contraire l'équilibre où les firmes proposent $p_2 = c_2$ et $p_1 = c_2 - \varepsilon$ ne subit pas cette critique. Il est le plus probable.

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Résumé

- Si les coûts sont les mêmes, l'équilibre de la Concurrence à la Bertrand est prix égale au Cm. La quantité offerte sur le marché est alors celle de CPP, partagée également entre les deux firmes.
- Si les coûts sont différents, disons $c_1 < c_2$, la firme au plus faible coût fixe $p_1 = c_2 - \varepsilon$ et la firme 2 vend $q_2^b = 0$, le firme 1 vend $q_1^b = q(c_2 - \varepsilon)$.

Illustration : la concurrence à la Bertrand

Croyons-nous en Bertrand ?

Au-delà de nos résultats, on pourrait se soucier que le nombre de firmes ne fait aucune différence.

Pensons à la concurrence de Bertrand comme un benchmark. Pourquoi n'observe t-on pas dans les industries qui sont en concurrence en prix que le $Cm = p$?

- A cause de contrainte de capacité (cf Edgeworth)
- Collusion/intéraction dynamique
- Différenciation des produits (chap 3.)

Stratégies mixtes

Stratégie pure (action) : souvent insuffisante pour décrire le comportement d'un joueur dans un jeu.

Comment écrire formellement qu'un joueur a tendance à jouer plus souvent pierre que ciseaux ?
$\Rightarrow$ Meilleure réponse de l'autre joueur : jouer plus souvent feuille $\Rightarrow$ Le premier joueur devrait donc jouer plus souvent ciseaux, ...

Est-ce une situation stable ? Il faut définir des stratégies aléatoires.

Exemples : tir au but, poker, feuille-pierre-ciseaux, stratégies militaires, inspections des impôts...

Stratégies mixtes

Definition 6

Une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble S_i des stratégies pures du joueur i. On note

$$\Sigma_i \equiv \Delta(S_i) = \{p \in \mathbb{R}^{|S_i|} : p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes et $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ un élément de Σ_i.

Une stratégie mixte σ_i est dite complètement mixte si $\sigma_i(s_i) > 0$ pour tout $s_i \in S_i$.
Une stratégie mixte σ_i est dite non dégénérée si elle n'assigne pas une probabilité égale à un à une des stratégie pures.

Stratégies mixtes

Hypothèses de VNM sur les préférences $\Rightarrow$ un profil de stratégies mixtes $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ est évalué par le joueur i à l'aide de l'utilité espérée $U_i : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$

$$U_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(\sigma)$$

où $\sigma(s)$ est la probabilité que le profil de stratégies pures s soit joué étant donné σ. Puisque les stratégies sont indépendantes on a $\sigma(s) = \Pi_{i \in N} \sigma_i(s_i)$.
On a donc

$$U_i(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum_{(s_1,...,s_n) \in S} \sigma_1(s_1) \times ... \times \sigma_n(s_n) u_i(s_1, ..., s_n)$$

Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Le jeu sous forme normale $(\mathcal{N}, \Sigma_i, U_i, i \in \mathcal{N})$ est appelé extension mixte du jeu sous forme normale $(\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$

Attention, par la suite "$u_i = U_i$".

$u_i(s_i, \sigma_i)$ est l'utilité espérée du joueur i lorsqu'il joue la stratégie pure s_i et lorsque les autres joueurs jouent le profil de stratégies mixtes σ_i.

Definition 7

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes du jeu sous forme normale

$$(\mathcal{N}, \Sigma_i, u_i, i \in \mathcal{N})$$

est un équilibre de Nash en stratégies pures de l'extension mixte de ce jeu c'est-à-dire, un profil de stratégies $\sigma^\star \in \Sigma$ tel que

$$u_i(\sigma_i^\star, \sigma^\star{}_i) \geq u_i(\sigma_i, \sigma^\star{}_i), \ \ \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \forall i \in N.$$

Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Proposition 3

L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est un sous ensemble de l'ensemble des équilibres de Nash en stratégies mixtes

Preuve. Un équilibre de Nash en stratégies pures est un profil de stratégies mixtes dégénéré. Ce profil de stratégies est un équilibre de Nash en stratégies mixtes car, d'après la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée on a

$$u_i(s_i^\star, s^\star{}_{i}) \geq u_i(s_i, s^\star{}_{i}) \forall s_i \in S_i \Rightarrow u_i(s_i^\star, s^\star{}_{i}) \geq u_i(\sigma_i, s^\star{}_{i}) \ \ \forall \sigma_i \in \Sigma_i.$$

Support de la stratégie mixte σ_i:

$$supp[\sigma_i] = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$$

soient encore toutes les actions jouées avec une probabilité strictement positive par le joueur i.

Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Proposition 4

Un profil de stratégies $\sigma^\star \in \Sigma$ est un équilibre de Nash en stratégies mixtes d'un jeu sous forme normale fini si et seulement si pour tout $i \in N$

$$u_i(s_i, \sigma^\star_{-i}) = u_i(s_i', \sigma^\star_{-i}) \;\; \forall s_i, s_i' \in supp[\sigma_i^\star]$$

$$et \; u_i(s_i, \sigma^\star_{-i}) \geq u_i(s_i'', \sigma^\star_{-i}) \;\; \forall s_i \in supp[\sigma_i^\star], s_i'' \in S_i$$

Preuve. L'équivalence provient directement de la multilinéarité de la fonction d'utilité espérée :

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma^\star_{-i})$$

En particulier, $\sigma_i \in MR_i(\sigma_{-i})$ si et seulement si $s_i \in MR_i(\sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in supp[\sigma_i]$. Autrement dit, on a toujours

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Equilibre de Nash en stratégies mixtes

Proposition 5 (Théorème de Nash)

Tout jeu sous forme normale fini possède au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Preuve. Ce résultat est un corollaire du théorème d'existence d'un EN en stratégies pures puisque l'extension mixte d'un jeu fini vérifie les propriétés demandées :

- pour tout i, l'ensemble des stratégies $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{|S_i|}$ est non vide, compact et convexe;
- la fonction $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ est multilinéaire, donc $u_i(\sigma)$ est continue en σ et quasi-concave en σ_i.

Proposition 6

Tout jeu fini symétrique admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes qui est symétrique

Preuve. Directement de la proposition concernant l'existence d'un EN en stratégies pures symétrique.

Exemple : Feuille, papier, ciseaux

J1/J2	F	P	C
F	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
P	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

- Equilibre de Nash en stratégies pures ?
- Y a t-il des EN où un des joueurs joue uniquement deux actions avec des probabilités strictement positives ?
  Par exemple, $p, q > 0$ et $r = 0$?
- Y a t-il où les joueurs jouent les 3 actions avec une probabilité strictement positive ? OUI, car il existe au moins un EN :
  $b - c = -a + c = a - b$ et $q - r = r - p = p - q, \Rightarrow$
  $a = b = c = 1/3$ et $p = q = r = 1/3$.

Illustration : le dilemme du volontaire

New York Times, vendredi 27 mars 1964 : "*37 Who Saw Murder Didn't Call the Police*"

On a parfois observé que lorsque le nombre de témoins augmente, non seulement la probabilité que chaque individu intervienne diminue, mais également la probabilité qu'au moins une personne offre son assistance diminue.

Trois explications ont été avancées :

- La diffusion de la responsabilité;
- La peur d'une évaluation négative (déviation de la norme);
- L'influence sociale.

Toutes reposent sur l'impact du nombre de témoins sur les coûts ou les bénéfices espérés d'une intervention.

Illustration : le dilemme du volontaire

Une explication par la théorie des jeux.

- n joueurs (témoins);
- Deux actions : appeler la police (action A) ou ne rien faire (action N);
- Préférences : chaque joueur accorde une valeur v au fait que la police soit prévenue, et supporte un coût c s'il est amené à prévenir lui même la police, avec

$$v > c > 0.$$

Il y a n équilibres de Nash en stratégies pures (exactement un joueur appelle la police). Mais coordination vers un de ces équilibres asymétriques difficile en pratique (sauf si communication ou joueurs hétérogènes)

Illustration : le dilemme du volontaire

Seul équilibre symétrique possible : en stratégies mixtes (non dégénérées) $\sigma_i(A) = q \in]0, 1[$: probabilité que le joueur i appelle la police, $i = 1, ..., n$.

Chaque joueur doit être indifférent entre les deux décisions : A qui conduit à un paiement $v - c$ et N qui donne $0Pr(\text{personne n'appelle}) + vPr(\text{au moins une personne appelle})$.

$$\text{donc } A \sim^i N \Leftrightarrow v - c = v[1 - (1 - q)^{n\ \ 1}]$$

$$\Leftrightarrow q = 1 - (c/v)^{1/n\ \ 1}.$$

- $Pr(1 \text{ personne donnée appelle}) = 1 - (c/v)^{1/n\ \ 1}$ décroît avec n.
- $Pr(1 \text{ personne au moins appelle}) = 1 - (1 - q)^n = 1 - (c/v)^{n/n\ \ 1}$ décroît avec n.

Stratégie prudente/ maximin

On considère la classe des jeux finis à deux joueurs :

$$(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2))\,.$$

On appelle le niveau d'utilité garanti par l'action s_1 du joueur 1, l'utilité la plus faible que le joueur 1 peut obtenir en jouant cette action :

$$\eta(s_1) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1,s_2)$$

Exemple : le jeu de la poule mouilée :

J1/J2	a	b
a	2, 2	1,3
b	3,1	0,0

$\eta_1(a) = \eta_2(a) = 1$ et $\eta_1(b) = \eta_2(b) = 0$.
Une action prudente ou maximin est une action qui maximise ce niveau d'utilité que le joueur peut se garantir.

Stratégie prudente/ maximin

Definition 8

Une action $s_1^\star \in S_1$ est une action prudente ou maximin du joueur 1 si

$$s_1^\star \in \arg\max_{s_1 \in S_1} \eta_1(s_1) = \arg\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2)$$

$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2) =$ meilleur niveau d'utilité possible garanti en stratégies pures pour le joueur 1.
Revenons au jeu de la poule mouillée :

J1/J2	a	b
a	2, 2	1,3
b	3,1	0,0

- Stratégie prudente de chaque joueur : a;
- Stratégie prudente de chaque joueur : a.

Conclusion : Un profil de stratégies prudentes n'est pas nécessairement un équilibre de Nash.

Stratégie prudente/ maximin

Definition 9

Une action $\sigma_1^\star \in \Sigma_1$ est une stratégie (mixte) prudente ou maximin du joueur 1 si

$$\sigma_1^\star \in \arg\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \eta_1(\sigma_1) = \arg\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$$

$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(\sigma_1, s_2)$ = meilleur niveau d'utilité possible garanti en stratégies mixtes pour le joueur 1.

Jeux à somme nulle

Definition 10

Un jeu sous forme normale à deux joueurs $(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2))$ *est un jeu à somme nulle ou un jeu strictement compétitif si les joueurs ont des préférences diamétralement opposées :* $u_1 = u$ *et* $u_2 = -u$*.*

Dans un jeu à somme nulle tout résultat est évidemment Pareto optimal! Exemples : feuille-pierre-ciseaux, jeu d'échec.

Jeux à somme nulle

Theorem (Von Neumann, 1928)

Considérons un jeu fini et à somme nulle. Un profil de stratégies $(\sigma_1^\star, \sigma_2^\star)$ est un équilibre de Nash si et seulement si $(\sigma_1^\star, \sigma_2^\star)$ est un profil de stratégies prudentes. De plus, on a

$$u_1(\sigma_1^\star, \sigma_2^\star) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$$

et donc tous les équilibres de Nash donnent la même utilité au joueur 1 (son meilleur niveau garanti possible, ou valeur du jeu), et au joueur 2.

- Cette égalité n'est pas vérifiée en stratégies pures, à moins qu'il y ait un EN en startégies pures.
- Le paiement d'équilibre peut être garanti par chaque joueur indépendamment du comportement de l'autre joueur. On a donc ici des stratégies optimales.
- Stratégies d'équilibre interchangeables.

Jeux à somme nulle

Proposition 7

Soit Γ un jeu sous forme normale fini à somme nulle et Γ' le jeu obtenu à partir de Γ en supprimant une action du joueur i.
Alors l'utilité d'équilibre du joueur i dans Γ' est inférieure ou égale à l'utilité d'équilibre du joueur i dans le jeu Γ.

Ceci n'est pas nécessairement vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique.

Preuve. Directement du fait que dans les jeux à somme nulle $u_1(\sigma_1^\star, \sigma_2^\star) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2)$d'après le théorème et du fait que si $Y \subseteq X$ alors $\max_{x \in X} f(x) \geq \max_{x \in Y} f(x)$.

Jeux à somme nulle

Pour montrer que le résultat n'est plus vrai dans les jeux à somme non nulle, même lorsque l'équilibre est unique, il suffit de considérer le jeu suivant :

J1/J2	a	b
a	10, 0	1,1
b	5,5	0,0

L'EN est (a, b). Si on supprime la stratégie a du joueur 1 alors l'unique équilibre devient (b, a) qui apporte une utilité strictement supérieure au joueur 1 (et 2).

Elimination itérative des stratégies dominées

- Equilibre de Nash : anticipations et coordination (souvent trop) parfaites;
- Stratégie prudente : anticipations (souvent trop) pessimistes, naïves (sauf dans les jeux à somme nulle)
- Elimination itérative des stratégies dominées : ne repose ni sur l'hypothèse d'anticipations parfaites ni sur l'hypothèse d'anticipations pessimistes,
  - mais sur l'idee que chaque joueur se comporte de maniere rationnelle { chacun pense que les autres se comportent de maniere rationnelle
  - chacun pense que chacun pense que chacun est rationnel... etc...

Elimination itérative des stratégies dominées

Definition 11

Une stratégie pure $s_i \in S_i$ *est strictement dominée s'il existe une stratégie mixte* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *telle que* $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ *pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$.

Definition 12

Une stratégie pure $s_i \in S_i$ *est strictement faiblement s'il existe une stratégie mixte* $\sigma_i \in \Sigma_i$ *telle que* $u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ *pour tout* $s_{-i} \in S_{-i}$ *avec une inégalité stricte pour au moins un profil de stratégies pures* s_{-i} *des autres joueurs.*

Elimination itérative des stratégies dominées

Une stratégie peut être strictement dominée par une stratégie mixte sans être strictement dominée par une stratégie pure.

Exemple.

Remarque : Si une stratégie pure s_i est strictement (faiblement) dominée alors toutes les stratégies mixtes qui mettent une probabilité strictement positive sur s_i sont strictement (faiblement) dominées.

Elimination itérative des stratégies dominées

Proposition 8

Une stratégie s_i du joueur i est strictement dominée si et seulement si s_i n'est jamais une meilleure réponse, c'est-à-dire que $s_i \in MR_i(\mu_{i})$ pour toute croyance $\mu_{i} \in \Delta(S_i)$ du joueur i sur le comportement des autres joueurs.

Elimination itérative des stratégies dominées

Definition 13

Un ensemble de profils de stratégies $S^\star \subset S$ résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement (faiblement) dominées s'il existe une suite d'éliminations représentée par une suite de profils de stratégies $(S^k)_{k=1}^K$, où $S^k = (S_i^k)_{i2N}$ pour tout k, telle que

- $S_0 = S$ *et* $S^K = S^\star$;
- $S^{k+1} \subset S^k$ *pour tout* k;
- *si* $s_i \in S^k$ *mais* $s_i \notin S^{k+1}$ *alors si est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit* $\Gamma^k = \{N, (S_i^k), u_{i,i}\}$;
- *Aucune action n'est strictement (faiblement) dominée dans le jeu réduit* $\Gamma^K = \{N, (S_i^K), u_i, i \in N\}$.

Exemple.

Elimination itérative des stratégies dominées

Proposition 9

L'ensemble $S^\star$ qui résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées est défini de manière unique.

Par conséquent, l'ordre d'élimination des stratégies strictement dominées n'affecte pas le résultat final.

L'ensemble $S^\star$ est aussi appelé ensemble des stratégies rationalisables.

Cependant, l'ordre d'élimination des stratégies faiblement dominées affecte le résultat final. Exemple.

Elimination itérative des stratégies dominées

Proposition 10

Toute action jouée avec une probabilitée positive à un équilibre de Nash résiste à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées. Ceci n'est pas vrai pour l'élimination itérative des stratégies faiblement dominées. Cependant, après une élimination itérative des stratégies faiblement dominées il existe toujours au moins un équilibre de Nash.