Olivier Bos
olivier.bos[at]u-paris2.fr

Eléments de correction de l'examen de théorie des jeux

Ocotobre 2017 – Durée: 2h

Exercice 1 : Théorème de point fixe et équilibre de Nash

Questions 1 − 5. Voir le cours.

Questions 6. Soient $MR_1(.)$ et $MR_2(.)$ les fonctions de meilleure réponse des joueurs J1 et J2. L'ensemble des stratégies de chaque joueur est $\{F, P, C\}$. Soit s_2 une stratégie de J2, $s_2 \in \{F, P, C\}$. Il suit que

$$MR_1(s_2) = \begin{cases} C & si \;\; s_2 = F \\ F & si \;\; s_2 = P \\ P & si \;\; s_2 = C \end{cases}$$

Soit s_1 une stratégie de J1, $s_1 \in \{F, P, C\}$. Il suit que

$$MR_2(s_1) = \begin{cases} P & si \;\; s_1 = F \\ C & si \;\; s_1 = P \\ F & si \;\; s_1 = C \end{cases}$$

Les fonctions de meilleures réponses des joueurs J1 et J2 ne se croisent jamais. Il n'y a donc pas d'équilibre de Nash (en stratégies pures).

Exercice 2 : All-pay auctions

Question 1. L'utilité de l'agent i est donné par :

$$u_i(v_i, b_i, b_{-i}) = \begin{cases} v_i - b_i & si \;\; b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ \frac{v_i}{k} - b_i & si \;\; i \text{ et } k-1 \text{ autres agents réalisent l'offre la plus élevée égale à.} b_i \\ -bi & si \;\; b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases}$$

Supposons qu'à l'équilibre $\beta(v_i) \geq v_i$. En gagnant, i obtient un gain de $u_i(v_i, b_i, b_{-i}) < 0$. Soumettre une offre qui conduit en gagnant (et en perdant) à un gain négatif est strictement dominée pour l'agent i. En faisant $\beta(v_i) \leq v_i$, il s'assure un paiement non négatif.

Vous pouvez remarquer que $\beta(0) \leq 0$ est une implication du résultat précédent. Une offre négative n'ayant aucun sens ici, il suit que $\beta(0) = 0$. Une autre méthode, donnée en cours, est possible. Supposons qu'à l'équilibre $\beta(0) > 0$. De nouveau $u_i(0, b_i, b_{-i})$ est négative, diminuer son offre jusqu'à 0 augmente le bien-être de i aussi bien en gagnant qu'en perdant. $\beta(0) > 0$ est donc une stratégie strictement dominée par $\beta(0) = 0$.

Question 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}u_i(v, V_{-i}, b) &= Pr(\forall j \neq i \ \ \beta(V_j) < b)(v - b) + (1 - Pr(\forall j \neq i \ \ \beta(V_j) < b))\, b \\
&= F^{n-1}(\beta^{-1}(b))v - b \\
&= G(\beta^{-1}(b))v - b
\end{aligned}$$

Dans l'enchère au premier prix, on obtenait une espérance d'utilité égale à $G(\beta^{-1}(b))(v-b)$. Cette différence, $-(1 - G(\beta^{-1}(b)))b$, est entièrement et uniquement dû à la règle de paiement. Dans l'enchère au premier prix, les perdants ne payent pas leur offre, et ainsi ont une perte espérée de $(1 - G(\beta^{-1}(b)))0 = 0$.

Question 3. La condition de premier ordre conduit à $g(\beta^{-1}(b))v\frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(b))} - 1 = 0$ lorsqu'on est à l'équilibre, c'est-à-dire $\beta(v) = b$. Soit encore $\beta'(v) = vg(v)$. En intégrant et en utilisant la condition de bord $\beta(0) = 0$, on obtient

$$\beta(v) = \int_0^v yg(y)dy.$$

Pour trouver la condition de second ordre, remarquez que si l'agent i dévie de l'équilibre $\beta(v)$ pour proposer $\beta(z)$, son espérance à l'équilibre devient $\mathbb{E}u_i(v, \beta(z)) = G(z)v - \beta(z)$. On peut alors montrer graphiquement qu'il a toujours une utilité plus élevée, $\mathbb{E}u_i(v, \beta(v)) = G(v)v - \beta(v)$, en ne déviant pas de l'équilibre, tel que $\mathbb{E}u_i(v, \beta(v)) - \mathbb{E}u_i(v, \beta(z)) \geq 0$ pour tout $z > v$ et pour tout $z < v$.

Question 4.

$$\begin{aligned}
\beta^{APA}(v) &= \int_0^v yg(y)dy \\
&= G(v)\frac{1}{G(v)}\int_0^v yg(y)dy \\
&= G(v)\beta^{FPA}(v) \\
&\geq \beta^{APA}(v) \text{ puisque } G(v) \geq 1
\end{aligned}$$

Plusieurs méthodes sont possibles pour montrer que $\beta^{APA}(v) \geq \beta^{SPA}(v) = v$.

- Méthode 1. Comme en cours, montrer que $\beta^{FPA} \leq \beta^{SPA}$. Vous avez alors $\beta^{APA}(v) \leq \beta^{FPA}(v) \leq \beta^{SPA}(v)$.
- Méthode 2. Remarquez que $v \geq \mathbb{E}\left(X \backslash X \leq v\right)$, ce qui implique $v \geq \dfrac{1}{G(v)}\displaystyle\int_0^v yg(y)dy \geq \beta^{APA}(v)$.

Exercice 3 : Nombre d'agents aléatoire, une application du théorème d'équivalence du revenu

Question 1. $\mathbb{E}u_i(v, \beta(z)) = G(z)v - t^A(z)$

Question 2. La question précédente établit la même espérance d'utilité que dans la démonstration du théorème d'équivalence du revenu. Ainsi, cette démonstration peut-être entièrement reproduite. En dérivant par rapport à z, on trouve $g(z)v - t^{A\prime}(z)$, qui à l'équilibre (pour $v = z$), est égal à zéro. En intégrant par rapport à v on trouve (sous l'hypothèse que $t^A(0) = 0$) :

$$t^A(v) = \int_0^v xg(x)dx.$$

Tout mécanisme d'enchère pour lequel $t^A(0) = 0$ conduit au même revenue espéré, indépendemment de la règle de paiement.

Question 3. Lorsque le nombre d'agents est connaissance commune, la stratégie d'offre dans l'enchère au second prix est indépendante du nombre d'agents. Autrement dit, le nombre d'agents n'affecte pas la stratégie d'offre, peu importe sa valeur. Si ce nombre est aléatoire, il ne peut dès lors pas non plus affecter la stratégie d'offre. Ainsi $\beta^{SPA}(v) = v$, que le nombre d'agents soit connu ou aléatoire. On peut vérifer cette indépendance au nombre d'agents dans la démonstration, qui est identique, que le nombre d'agents soit connu ou inconnu.

Supposons que tous les agents actifs (sans connaître leur nombre) jouent $b_i = v_i$ sauf le joueur 1 qui propose $b_1 > v_1$. Cette déviation conduit à étudier trois cas possibles :

— $b_1 > v_1 > \bar{b}$. 1 gagnait avant la déviation et obtenait un gain de $v_1 - \bar{b}$, il gagne à nouveau après la déviation et son payoff demeure inchangé. Il est donc indifférent à dévier ou non.

— $b_1 > \bar{b} > v_1$. 1 perdait avant la déviation pour un payoff de 0, désormais il gagne et obtient un payoff de $v_1 - \bar{b} < 0$. Dévier est ici dominé.

— $\bar{b} > b_1 > v_1$. 1 perdait avant la déviation, il perd à nouveau après et obtient le même payoff égale à 0. Il est indifférent à dévier.

Dévier conduit à un payoff identique ou inférieur, il s'agit donc d'une stratégie dominée. Le joueur 1 ne fera déviera jamais en faisant $b_1 > v_1$. Le cas $b_1 < v_1$ est symétrique et donc identique.

Question 4. Pour chaque nombre d'agents actifs potentiels n, en plus de l'agent i, le paiement espéré est $G^{(n)}(v)\mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \backslash Y_1^{(n)} \leq v\right)$. L'agent i calcule donc une espérance à partir de ses croyances sur $\mathcal{A}$, donnée par la distribution $\{p_n\}_{n=1}^{n=N-1}$:

$$t^{SPA} = \sum_{n=0}^{N-1} p_n G^{(n)}(v)\mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \backslash Y_1^{(n)} \leq v\right)$$

Question 5. Puisque le théorème d'équivalence du revenu est toujours valide ici, et que $t^{FPA}(0) = t^{SPA}(0) = 0$ est vérifié, on a $t^{FPA}(v) = t^{SPA}(v)$ pour tout v. En utilisant $t^{FPA}(v) =$

$G(v)\beta^{FPA}(v)$ et $t^{SPA} = \sum_{n=0}^{N-1} p_n G^{(n)}(v)\mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \backslash Y_1^{(n)} \leq v\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}\beta^{FPA}(v) &= \frac{t^{SPA}(v)}{G(v)} \quad \forall v \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} p_n \frac{G^{(n)}(v)}{G(v)} \mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \backslash Y_1^{(n)} \leq v\right) \quad \forall v.\end{aligned}$$