Olivier Bos
olivier.bos[at]u-paris2.fr

Master 2 ISF
Université Panthéon-Assas

Examen de théorie des jeux

Octobre 2017 – Durée: 2h00

Indications et consignes :

— Aucun document n'est autorisé ;
— Les machines à calculer et les téléphones portables sont interdits ;
— La qualité de la présentation et la tenue de la copie peuvent faire l'objet de points négatifs ;
— Toutes communications, quelque soit leur nature, sont interdites ;
— Le barême, sur 20 (22 points sont disponibles), est donné à titre indicatif et susceptible d'être modifié.

Exercice 1 : Théorème de point fixe et équilibre de Nash (8 points)

Théorème du point fixe de Brouwer (1912) : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non-vide, compact et convexe et $f : A \longrightarrow A$ une fonction continue. Alors, f admet un point fixe (au moins un), c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $x = f(x)$.

1. A l'aide d'un ou plusieurs graphiques, expliquez le théorème de Brouwer. Pour cela vous pourrez poser $A = [0, 1]$. Vous représenterez alors graphiquement une fonction discontinue et expliquerez en quoi la continuité est une condition nécessaire au théorème de Brouwer. (1,5 points)
2. Peut-on remédier à l'hypothèse de continuité ? Si oui comment ? Expliquez avec précision votre argumentation. (1 point)

   Indications : Un autre théorème de point fixe pourra être proposé, accompagné d'illustration(s) graphique(s).
3. Rappelez la définition d'un équilibre de Nash et l'interpréter brièvement. (0,5 point)
4. En quoi un théorème de point de fixe peut assurer l'existence d'un équilibre ? Votre réponse vous conduira à énoncer le théorème d'existence de l'équilibre de Nash, éventuellement d'autres résultats (lemme/proposition) vues en cours, et à les démontrer. Alternativement, vous pourrez fournir des intuitions et des explications détaillées (3 points).
5. Un théorème de point fixe peut-il guarantir l'unicité d'un équilibre ? Argumentez brièvement votre réponse. Un graphique pourra être fourni. (1 point)

6. Déterminez tous les équilibres de Nash (en stratégies pures) du jeux feuille, papier, ciseaux présenté sous sa forme matricielle (1 point) :

J1/J2	F	P	C
F	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
P	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Exercice 2 : All-pay auctions (8 points)

Soit n agents qui participent à une enchère du type *all-pay auction*. Dans celle-ci, tous les participants soumettent simultanément leur offre. Une fois l'enchère terminée, l'objet est alloué à l'agent ayant soumis l'offre la plus élevée, tandis que le vainqueur et tous les perdants paient leur offre soumise.

Chaque agent i possède une valeur privée (ou type) notée v_i pour l'objet mis en vente, que lui seul connaît. Chaque agent sait que tous les autres participants à l'enchère ont aussi une valeur privée dont la valeur est comprise entre 0 et $\bar{v}$, caractérisée par une loi de probabilité de fonction de répartition F et de densité f.

A l'équilibre symétrique, chaque agent i soumet un offre $b_i = \beta(v_i)$ où β est la fonction d'offre (à l'équilibre). On note $G(.) = F^{n-1}(.)$ la fonction de répartition de la statistique d'ordre la plus élevée parmi $n-1$ variables aléatoires et g sa densité.

1. Montrez qu'à l'équilibre, $\beta(v) \leq v$ et $\beta(0) = 0$. (1 point)
2. Nous sommes à l'équilibre, tous les agents soumettent leur offre à l'équilibre étant donnée la fonction β. Déterminez l'utilité espérée de l'agent 1 lorsque ce dernier dévie de l'équilibre en soumettant une offre b. En quoi celle-ci diffère t-elle de l'utilité espérée pour une enchère au premier-prix ? (1,5 point)
3. Déterminez la fonction d'offre $\beta(.)$ à l'équilibre symétrique. Un raisonnement graphique pourra accompagner la condition de second-ordre. (4 points)
4. Comparez l'offre à équilibre avec celles des enchères au premier-prix et au second prix, données respectivement par $\frac{1}{G(v)} \int_0^v yg(y)dy$ et v. Concluez. (1,5 points)
   Indication : Remarquez que $v \geq \mathbb{E}(X \backslash X \leq v)$ où X est une variable aléatoire.

N'oubliez pas de tourner la page. Un troisième exercice vous attend page 3.

Exercice 3 : Nombre d'agents aléatoire, une application du théorème d'équivalence du revenu (6 points)

Jusqu'à présent le nombre d'agents était supposé connaissance commune, c'est-à-dire connus de tous. Cet exercice propose d'étudier le théorème d'équivalence du revenu au-delà de cette hypothèse.

Soit $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$ l'ensemble des acheteurs potentiels qui souhaitent participer à une enchère. Le nombre de participants actifs, c'est-à-dire qui soumettent une offre positive ou nulle, peut-être inférieur à N. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des participants actifs dans l'enchère, tel que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$. Le nombre participants actifs est inconnu, $\mathcal{A}$ et son cardinal sont donc inconnus, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ devient la seule information disponible sur le nombre d'agents qui participent effectivement.

Chaque participant potentiel i a une valeur privée (ou type) notée v_i pour l'objet mis en vente, que lui seul connaît. Chaque agent sait que tous les autres participants à l'enchère ont une valeur privée dont la valeur est comprise entre 0 et $\bar{v}$, caractérisée par une loi de probabilité de fonction de répartition F et de densité f.

Chaque agent $i \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire qui prend part activement à l'enchère, associe la probabilité p_n à l'évènement "n autres agents participent activement à l'enchère". Tous les participants potentiels ont les mêmes croyances p_n sur le nombre de participants actifs, telles que $p_n \geq 0, p_n \leq 1, \sum_{n=0}^{N-1} p_n = 1, \forall n \in \mathcal{N}$.

On note $\beta^A(.)$ la fonction d'offre à l'équilibre dans une enchère A et $Y_1^{(n)}$ est la plus haute statistique d'ordre parmi n variables aléatoires (des n autres participants actifs).

Supposons qu'un agent actif i soumette une offre $\beta^A(z)$. En faisant face à n autres participants actifs avec certitude, il remporterait l'enchère si $\beta^A(z) > \beta^A\left(Y_1^{(n)}\right)$ soit encore si $z > Y_1^{(n)}$. Sa probabilité de gagner serait alors $G^{(n)}(z) = F^n(z)$. Or, i ne sait pas à combien d'autres participants il fait face. Ainsi, lorsqu'il soumet $\beta^A(z)$, sa probabiltié de gagner tient compte de l'aléa sur le nombre de participants actifs : $G(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} p_n G^{(n)}(z)$.

1. On note $t^A(.)$ le paiment espéré d'un agent qui participe activement à l'enchère A. Soit l'agent $i \in \mathcal{A}$ de type v, qui dévie de sa stratégie d'offre à l'équilibre en soumettant $\beta^A(z)$ au lieu de $\beta^A(v)$, avec $z \neq v$. Déterminez l'espérance d'utilité de i. (1 point)
2. Le théorème d'équivalence du revenu est-il vérifié ici ? Expliquez clairement votre réponse à l'aide de la question précédente. (0,5 point)
3. La stratégie d'offre à l'équilibre dans l'enchère au second-prix est-elle modifée lorsque le nombre d'agent devient aléatoire ? Ecrire cette stratégie d'offre. Pour justifiez votre réponse vous pourrez vous appuyer sur la démonstration, en la reproduisant, dans le cas où le nombre d'agents est connaissance commune. (2 points)
4. Pour un nombre d'agents actif donné n, le paiement espéré dans l'enchère au second-prix est égal à $G^{(n)}(v)\mathbb{E}\left(Y_1^{(n)} \backslash Y_1^{(n)} \leq v\right)$. En utilisant les croyances $\{p_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ de l'agent i sur le nombre de participants actifs, déterminez l'espérance de paiement de l'enchère au second-prix. (1 point)
5. L'espérance de paiement dans l'enchère au premier-prix est donnée par $t^{FPA}(v) = G(v)\beta^{FPA}(v)$. En utilisant le résultat à la question précédente et le théorème d'équivalence du revenu, déterminez la stratégie d'offre à l'équilibre de l'enchère au premier-prix. Que remarquez-vous ? (1,5 points)