Théorie des jeux
Chapitre 1 : Introduction et rappels

Olivier Bos
olivier.bos@u-paris2.fr

1. Introduction

Qu'est-ce que la théorie des jeux ?

Théorie des jeux : Théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants, c'est-à-dire qui s'influencent les uns les autres et qui ont conscience de ces influences réciproques.

Jeux : Situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres individus.

Sont donc concernés, tous les problémes économiques, sociaux, politiques, diplomatiques et militaires, mais aussi les interactions entre les espèces/gènes.

1.1 Exemple : la concurrence imparfaite

L'Economie Industrielle peut-être définie comme "l'économie de la concurrence imparfaite".

La concurrence imparfaite implique, habituellement, des intéractions stratégiques. L'action d'une firme (choix de prix, de quantité, de qualité du produit, de R&D) a des conséquences importantes sur le profit de ses rivales.

Que peut-on prédire a propos d'une industrie dans laquelle les firmes intéragissent stratégiquement ?

- En concurrence parfaite, qui suppose qu'il n'y a pas d'intéraction stratégique, nous utilisons un concept d'équilibre : l'équilibre walrasien.
- Peut-on trouver un concept de solution avec des intéractions stratégiques ?

La théorie des jeux, qui peut être définie comme l'étude des problèmes de décision entre plusieurs agents, a été utilisée pour définir de tels concepts de solutions. On parle parfois de théorie de la décision intéractive.

1.1 Exemples : les décisions d'investissements

Qu'est-ce qui détermine les décisions des investisseurs sur les marchés financiers ?

Keynes, 1936 : Sur les marchés financiers, les prix des titres ne sont pas déterminés par leur valeur intrinsèque, mais par la perception qu'en ont les acteurs du marché (perspectives de croissance de l'entreprise, attentes sur son résultat...).

→ La meilleur stratégie pour l'investisseur... consiste à deviner ce que les autres pensent.

→ Le prix d'un titre financier est ainsi déterminé par un mécanisme auto-référent fondé sur ce que chacun pense que les autres pensent que les autre pensent *ad infinitum*.

1.1 Exemples : autres exemples

- Enchére : l'issue (i.e., le gagnant et le prix qu'il a payé) dépend des actions de tous les enchérisseurs et du type d'enchére utilisée par l'organisateur
- Compétition électorale
- Décisions de membres d'un jury sur un verdict
- Macroéconomie ouverte : coordination internationale des politiques économiques
- En biologie

1.2 Trois grands thèmes en théorie des jeux

1. La théorie des jeux non-coopératifs ou stratégiques;
   $\rightarrow$ Jeux sous forme normale (stratégique) / sous forme extensive (développée) – Jeux à information parfaite / information imparfaite
2. La théorie des jeux coopératifs ou coalitionnels;
3. Le choix social, la théorie de l'implémentation et des mécanismes.

1. joueurs indépendants, stratégies, préférences, notion d'équilibre;
2. coalitions, valeurs des coalitions, contrats contraignants / approche axiomatique;
3. on modifie les paramètres du jeu (règles, transferts, ...) afin d'obtenir des solutions qui vérifient des propriétés globales souhaitées (la Pareto-optimalité, certains critères de justice, la protection de l'environnement, ...).

Illustrations

1. Bus ou voiture ?
2. Valeur de l'information

Définition générale d'un jeu

1. L'ensemble des joueurs;
2. Les règles du jeu (qui peut faire quoi et quand);
3. L'information dont disposent les joueurs (sur le nombre de joueurs, les règles, les préférences, et l'information des autres);
4. Les préférences des joueurs sur les enchaînements d'actions et leurs issues. Généralement, fonctions d'utilité espérées de type von Neumann et Morgenstern.

Théorie des jeux n'est pas de l'optimisation ou de la théorie de la décision.

- Résolution du jeu non automatique : concept de solution et solution elle-même rarement uniques
- Quels concepts de solution "raisonnables" ?

Hypothèses courantes : Rationalité (préférences rationnelles / maximisation de l'utilité) et "Intelligence".

1.3 Histoire de la pensée

- Bertrand (1883) et Cournot (1838);
- Edgeworth (1881) : concept de “coeur”;
- Zermelo (1913) : positions gagnantes dans le jeu d’echec;
- Emile Borel (1921) : stratégie mixte;
- Von Neumann (1928) : théorème de maximin (compétition pure à deux joueurs);
- Von Neumann et Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*;
- Nash (1950b, 1951), notion d’équilibre, jeux généraux;
- Nash (1950a, 1953) : la solution de négociation;
- Shapley (1952 – 1953) : “coeur” et valeur d’un jeu coopératif;
- Aumann (1959) : jeux répétés et “folk theorems”;

Histoire de la pensée

- Selten (1965, 1975), Kreps et Wilson (1982), raffinements d'équilibre;
- Harsanyi (1967–1968), information asymétrique;
- Aumann et Maschler (1966, 1967); Stearns (1967); Aumann et al. (1968) : jeux répétés à information incomplète;
- Aumann (1974, 1987) : équilibre corrélé, justification épistémique des équilibres;
- Lewis (1969), Aumann (1976), connaissance commune;
- Hurwicz, Maskin et Myerson, théorie des mécanismes.

1.4 Bibliographie

En théorie des jeux :

- Eric Rasmusen (2004), *Jeux et information*, De Boeck;
- Demange et Ponssard (1994), *Théorie des jeux et analyse économique*, PUF;
- Martin Osborne et Ariel Rubinstein(1994), *A course in game theory*, MIT Press;
- Myerson (1991),*Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard Press.

Mais aussi,

- Mas-Colell, Whinston and Green (1995), *Microeconomic Theory*, chap. 3, 6-9, Oxford University Press;
- Vijay Krishna (2010), *Auction theory*, Academic Press.

2. Jeux sous forme normale

La théorie des jeux, qui peut être définie comme l'étude des problèmes de décision entre plusieurs agents, a été utilisée pour définir de tels concepts de solutions. On parle parfois de "théorie de la décision intéractive".

Plan du chapitre

- Définition d'un jeu sous la forme normale et exemples;
- Un premier concept de solution : l'équilibre en stratégie dominante;
- Un concept moins restrictif : l'équilibre de Nash;
- Existence d'un équilibre de Nash;
- Exemples.

2.1 Définition

Un jeu $\Gamma = (\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ sous forme normale ou stratégique est décrit par :

- L'ensemble des joueurs $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$;
- L'espace des stratégies pures ou des actions pour chaque joueur i est noté S_i, où chaque joueur i choisit la stratégie s_i, élément de S_i. Exemples : $S_i = \mathbb{R}_+$, $S_i = \{a, b\}$.
- Une fonction de paiement (d'utilité ou de gain) $u_i(s_1, ..., s_n)$ pour chaque joueur i, telle que $u_i : S_1 \times ... \times S_n \to \mathbb{R}$, lorsque les joueurs jouent les stratégies $(s_1, ..., s_n)$.
  L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de celle des autres (ses préférences sont définis sur S et non sur S_i)

On appel issue du jeu ou profil de stratégies, la liste $(s_1, ..., s_n) \in \Pi_{i=1}^n S_i$.

Exemple : le duopole de Cournot

Rappels à propos de la concurrence oligopolistique :

- Peu de firmes.
- Les actions/décisions (prix, quantités, publicité) prises par une firme affectent les profits de ses rivaux.
- Quand une firme choisit son action, elle doit anticiper celles de ses rivaux.
- Dans un cadre dynamique, la firme doit non seulement anticiper les actions de ses rivaux aujourd'hui mais aussi pour les périodes futurs.
- La nouveauté ici : il y a des intéractions stratégiques
- Dans un monopole ou CPP il n'y a aucune intéraction stratégique :
  - Aucun rival pour le monopole;
  - En CPP, le choix de chaque firme en (prix, quantité) n'a aucun impact sur le prix et la quantité du marché, et donc sur le payoffs de ses rivaux;
  - On suppose ici que les consommateurs sont parfaitement compétitifs mais pas les firmes.

Un cadre naturel pour étudier ces intéraction stratégiques : les modèles de théorie des jeux.

Exemple : le duopole de Cournot

Supposons que les firmes choisissent leur niveau de production.

Hypothèses :

1. $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1, 2$, coût marginal constant, coût fixe nul.
2. Fonction de demande inverse linéaire : $p(Q) = a - bQ$ où $Q = q_1 + q_2$, soit encore $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$, avec $b > 0, a > c_i$.
3. Fonction de profits de la firme i :

$$\begin{aligned}
\pi_i(q_1, q_2) &= p(q_1 + q_2)q_i - c_i(q_i) \\
&= a - b(q_1 + q_2) - c_i q_i \\
&= b(\frac{a}{b} - (q_1 + q_2) - \frac{c_i}{b}) \\
&= b(\theta_i - (q_1 + q_2) \text{ avec } \theta_i = \frac{a - c_i}{b} > 0.
\end{aligned}$$

Exemple : le duopole de Cournot

Neutralité pour le risque, on peut définir la fonction d'utilité comme $u_i(q_1, q_2) \equiv \pi_i(q_1, q_2)$. La forme normale est donc déterminée ici :

- Les joueurs : $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;
- Ensemble de stratégies/actions : tous les niveaux de productions/quantités possibles $\mathbb{R}_+$;
- Fonctions de payoffs (de profits) :

$$u_i(q_1, q_2) = b(\theta_i - (q_1 + q_2) \text{ avec } \theta_i = \frac{a - c_i}{b}.$$

Jeux finis

Un jeu Γ sous forme normale $(\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ est fini si l'ensemble des joueurs et l'ensemble des actions de chaque joueur sont finis. Le duopole de Cournot est-il un jeu fini?

Représentation d'un jeu fini à deux joueurs :

J1/J2	...	s_2	...
...	...	...	...
s_1	...	$u_1(s_1, s_2), u_2(s_1, s_2)$	...
...	....	...	...

On parle parfois de représentation matricielle d'un jeu fini à 2 joueurs.
Conventions :

- Le joueur 1 est en ligne, le joueur 2 en colonne.
- Paiement : (joueur ligne, joueur colonne)

Jeux finis

Trois joueurs (2 actions par joueur) :

J1/J2	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3)$	$u(s_1, s_2', s_3)$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3)$	$u(s_1', s_2', s_3)$

J3; s_3

J1/J2	s_2	s_2'
s_1	$u(s_1, s_2, s_3')$	$u(s_1, s_2', s_3')$
s_1'	$u(s_1', s_2, s_3')$	$u(s_1', s_2', s_3')$

J3; s_3'

avec $u(.,.,.) = (u_1(.,.,.), u_2(.,.,.), u_3(.,.,.))$.

Exemple : Le dilemme du prisonnier

- Deux joueurs : prisonnier 1 et prisonnier 2; Les deux sont suspectés d'avoir commis (ensemble) un crime
- Stratégies du prisonnier i :
  - C "coopérer", ie témoigner contre le prisonnier j
  - NC "ne pas coopérer", rester silencieux.

  Donc $S_1 = S_2 = \{C, NC\}$;
  $S = \{(C, NC), (NC, C), (C, C), (NC, NC)\}$. Un exemple de profil de stratégies est (C, C).
- Fonction de paiement du joueur 1 :

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } s_1 = s_2 = NC \\ 0 & \text{si } s_1 = C, s_2 = NC \\ -10 & \text{si } s_1 = NC, s_2 = C \\ -6 & \text{si } s_1 = s_2 = C \end{cases}$$

- Paiement symétrique pour le joueur 2.

Exemple : Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier est-il un jeu fini ?

J1/J2	NC	C
NC	-1, -1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

Chaque joueur gagne à coopérer quelle que soit l'action de l'autre joueur : c'est un dilemme de rationalité individuelle/collective

Remarque 1 : Sous-entendus du modèle :

- Les décisions des joueurs sont indépendantes;
- Les deux joueurs connaissent le jeu et jouent une seule fois.

Remarque 2 : le dilemme du prisonnier a de multiples applications en IO. Ex: la concurrence en prix avec de produits homogènes.

3. Stratégies dominantes et équilibres

L'action s_i du joueur i domine faiblement son action s_i' si :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i}, \;\; u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

$$\exists s_{-i} \text{ tel que } u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}).$$

L'action s_i du joueur i domine strictement son action s_i' si :

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \;\; u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Une action est strictement/faiblement dominante si elle domine strictement/faiblement toutes les autres actions.

Contre-exemple.

J1/J2	G	D
H	(2,0)	(1,0)
M	(2,2)	(0,0)
B	(1,0)	(0,2)

Dans le jeu précedent H domine faiblement M, M domine faiblement B et H domine strictement B. Aucun ordre de dominance ne peut être établi pour le joueur 2

Exemple : retour au dilemme du prisonnier

J1/J2	NC	C
NC	-1,-1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

- Quoi que face J2, J1 choisit toujours C
- C est une stratégie dominante pour J1
- Pour J2 ?

3.2 Equilibre en stratégies dominantes

On peut définir notre premier concept d'équilibre :

Definition 1 (Equilibre en stratégies dominantes)

Un profil de stratégies $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *est un équilibre en stratégies dominantes si pour tout joueur* i, $s_i^\star$ *est une stratégie dominante.*

Formellement $\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i' \in S_i,$

$$u_i(s_i^\star, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}).$$

Revenons au dilemme du prisonnier.

J1/J2	NC	C
NC	-1,-1	-10,0
C	0,-10	-6,-6

- C stratégie dominantes pour les deux joueurs
- NC pas une stratégie dominante pour J1 et comme J2
- Conclusion : le seul équilibre en stratégies dominantes est (C, C).

3.2 Equilibre en stratégies dominantes

- Pareto Optimum ?

Definition 2

Un optimum de Pareto est un profil d'action $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *qui n'est pas Pareto-dominé, c'est-à-dire tel que pour tout autre profil d'action* $(s_1, ..., s_n)$,

1. *tous les joueurs préfèrent faiblement* $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *à* $(s_1, ..., s_n)$ *:*

$$\forall i, \;\; u_i(s_1^\star, ..., s_n^\star) \geq u_i(s_1, ..., s_n)$$

2. *Il existe au moins un joueur qui préfère strictement* $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ *à* $(s_1, ..., s_n)$ *:*

$$\exists j, \;\; u_j(s_1^\star, ..., s_n^\star) > u_j(s_1, ..., s_n)$$

Si $(s_1^\star, ..., s_1^\star)$ est un OP, toute modification de ce profil entraîne une baisse de gain d'au moins un des joueurs.

- Ils seraient mieux en faisant de la collusion...

Exemples.

La bataille des sexes

H/F	O	F
O	1,2	0,0
F	0,0	2,1

Jeu de coordination

J1/J2	a	b
a	2,2	0,0
b	0,0	1,1

Exemples de jeux à somme nulle (stricte compétition)

Matching pennies

J1/J2	P	F
P	-1,1	1,-1
F	1,-1	-1,1

- Joueurs 1 et 2
- Ensemble des stratégies = $\{P, F\}$
- Paiements

$$u_1(p_h, p_b) = \begin{cases} -1 \;\; si \;\; (P,P) \\ 1 \;\; si \;\; (P,F) \\ 1 \;\; si \;\; (F,P) \\ -1 \;\; si \;\; (F,F) \end{cases}$$

Exemples de jeux à somme nulle (stricte compétition)

Feuille, papier, ciseaux

J1/J2	F	P	C
F	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
P	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Equilibre en stratégies dominantes

- Les stratégies dominantes sont rares ;
- Une stratégie dominante est la meilleure option contre n'importe quelles stratégies des autres. Par ailleurs, un joueur rationnel
  - ne jouera jamais de stratégie strictement dominée;
  - jouera à coup sur une stratégie strictement dominante;
  - ne perd rien à jouer une stratégie faiblement dominante.
- En général : Une stratégie peut être préférée face à certaines stratégies des rivaux, mais elle n'est pas la meilleure option face à d'autres stratégies. Par exemple : dans le jeu de coordination, aller à l'opéra est préféré si l'autre y va, mais pas s'il n'y va pas.

3.3 Equilibre de Nash en stratégies pures

Que peut-on dire quand il n'y a pas de stratégies dominantes ? Comment fait-on pour aller au-delà des restrictions de notre concept d'équilibre ? John Nash y répond pour nous (1951) : Concept de stabilité : situation où aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement (individuellement) de sa stratégie.

Definition 3

On appelle meilleure réponse de i aux stratégies s_{-i} une stratégie $MR_i(s_{-i})$ telle que : $MR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$

Definition 4

Un profil de stratégies pures $(s_1^\star, ..., s_n^\star)$ est un équilibre de Nash d'un jeu $\Gamma = (\mathcal{N}, S_i, u_i, i \in \mathcal{N})$ si pour chaque joueur i, $s_i^\star$ est une meilleure réponse à $s_{-i}^\star$ c'est-à-dire

$$u_i(s_i^\star, s_{-i}^\star) \geq u_i(s_i, s_{-i}^\star) \ \ \forall s_i \in S_i, \forall i \in \mathcal{N}$$

3.3 Equilibre de Nash en stratégies pures

Situation où les joueurs anticipent correctement les stratégies des autres et se comportent rationnellement étant données leurs anticipations qui sont auto-réalisatrices.

Proposition 1

- *Si l'action* s_i *est strictement dominée alors* s_i *n'est jamais jouée à un équilibre de Nash;*
- *Si l'action* s_i *est strictement dominante pour tout* $i \in \mathcal{N}$ *alors* $s = (s_1, ..., s_n)$ *est l'unique équilibre de Nash;*
- *Si l'action* s_i *est faiblement dominante pour tout* $i \in \mathcal{N}$ *alors* $s = (s_1, ..., s_n)$ *est un équilibre de Nash (pas nécessairement le seul, mais les autres EN ne peuvent pas être strictes).*

Preuve ?Par définition de l'équilibre de Nash.

Exemples

Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures et solutions Pareto optimales des jeux finis précédents ?

Deux joueurs peuvent se partager 2 euros. Ils annoncent simultanément une quantité demandée, s_1 et s_2, où $s_1, s_2 \in [0, 2]$. Si $s_1 + s_2 \leq 2$ alors chaque joueur i reçoit la quantité si qu'il a demandé. Si au contraire $s_1 + s_2 > 2$ alors ils ne reçoivent rien. Equilibres de Nash en stratégies pures ? Lesquels sont Pareto optimaux ? L'ensemble des équilibres de Nash en stratégies pures est l'ensemble des couples $(s_1, s_2) \in [0, 2]^2$ tels que $s_1 + s_2 = 2$.

4.1 Illustration : Accords internationaux et bien public

Soient n Etats qui négocient le niveau de leur émission de pollution $s_i \geq 0$. L'utilité du pays i est donné par

$$u_i(s_1, ..., s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j$$

où $v' > 0 > v''$ et $v'(0) > 1$, par exemple $v(x) = ln(x)$.

Chaque joueur a une action dominante c'est-à-dire telle que

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \Leftrightarrow v'(s_i) = 1.$$

On a donc un unique équilibre de Nash, symétrique : chaque joueur choisit l'action dominante $s_i^\star$ qui vérifie $v'(s_i^\star) = 1$. Si $v(x) = ln(x)$ alors $s^\star = (1, ..., 1)$.

4.1 Illustration : Accords internationaux et bien public

Quel profil d'actions $\bar{s} = (\bar{s}_1, ..., \bar{s}_n)$ maximise le bien-être social ?

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s_1, ..., s_n) = \sum_{i=1}^{n} v(s_i) - n \sum_{j=1}^{n} s_j$$

tel que pour tout k $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial s_k}(\bar{s}) = 0 \Leftrightarrow v'(\bar{s}_k) = n$.

L'équilibre de Nash est ici Pareto dominé : $v'' < 0$, donc v' est décroissante ce qui induit que $s_i^\star > \bar{s}_i$. A l'équilibre, les Etats polluent trop!

4.1 Illustration : Accords internationaux et bien public

Comment atteindre équilibre et efficacité sociale ? En imposant une taxe à polluer!

$$u_i(s_1, ..., s_n) = v(s_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j + -\theta s_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta s_j$$

Action dominante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i}(s) = 0 \Leftrightarrow v'(s_i) = 1 + \theta - \frac{1}{n}\theta = 1 + \theta \frac{n-1}{n}.$$

L'équilibre de Nash est équivalent à l'optimum social si :

$$1 + \theta \frac{n-1}{n} = n \text{ i.e., } \theta = n.$$

Existence de l'Equilibre de Nash en stratégies pures

4.1 Illustration : Concurrence à la Cournot

Les firmes choisissent leur niveau de production.

Hypothèses :

1. $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1, 2$.
2. Fonction de demande $p(Q) = a - bQ$ où $Q = q_1 + q_2$

4.2 Illustration : Concurrence à la Cournot

Définition du jeu ici :

- les joueurs : les firmes
- Ensemble de stratégies/actions : toutes les niveaux de productions/quantités possibles $q_i \in \mathbb{R}_+$
- Fonctions de payoffs (de profits) :

$$\pi_i(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_i - C_i(q_i)$$

L'équilibre de Nash existe t-il ?
Une paire $\{q_1^c, q_2^c\}$ est un équilibre de Cournot (équilibre de "Nash en quantité") si :

1. Etant donné $q_2 = q_2^c$, q_1^c résout $\max_{q_1} \pi_1(q_1, q_2^c)$;
2. Etant donné $q_1 = q_1^c$, q_2^c résout $\max_{q_2} \pi_2(q_1^c, q_2)$;

Autrement dit, étant donné que la rivale de i joue sa stratégie de Cournot, j n'a pas intérêt à dévier. Elle ne peut pas augmenter son profit en changeant q_j^c pour une autre valeur.
Le prix à l'équilibre de Cournot est donné par $p^c = a - b(q_1^c + q_2^c)$.

4.2 Illustration : Concurrence à la Cournot

Pour obtenir l'équilibre, on réalise une analyse en termes de fonctions de meilleurs réponses. Pour la firme 1, son payoff étant donné q_2 :

$$\pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1$$

CPO : $a - bq_2 - 2bq_1^c - c_1 = 0$ On a toujours Rm=Cm.

L'équilibre existe t-il (à nouveau) et sommes-nous à l'optimum ?π_1 strictement concave en q_1? CSO: $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1^2}(q_1, q_2) = -2b < 0$

4.2 Illustration : Concurrence à la Cournot

Fonction de réaction de la firme 1 ?

$$q_1 = R_1(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c_1}{2b} - \frac{1}{2}q_2 \text{ si } q_2 \leq \frac{a-c_1}{b} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

Doit-on calculer $R_2(q_1)$? Par symétrie...

$$q_2 = R_2(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c_2}{2b} - \frac{1}{2}q_1 \text{ si } q_1 \leq \frac{a-c_2}{b} \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$$

4.2 Illustration : Concurrence à la Cournot

Remarquez que les fonctions de réactions sont décroissantes : si ma rivale augmente sa quantité, alors je diminue la mienne ! Les quantités sont des substituts stratégiques.

Equilibre ? Il nous faut résoudre le système $q_1^c = R_1(q_2^c)$ et $q_2^c = R_2(q_1^c)$. On obtient (q_1^c, q_2^c).

$$\begin{cases} q_1^c = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} \\ q_2^c = \frac{a-2c_2+c_1}{3b} \end{cases}$$

A l'équilibre la quantité totale offerte est $Q^c = q_1^c + q_2^c = \frac{a-c_1-c_2}{3b}$.

Soit encore $p^c = a - bQ^c = \frac{a+c_1+c_2}{3}$, $\pi_i^c = (p_i^c - c_i)q_i^c = b(q_i^c)^2$.

Jeux symétriques

Definition 5

Un jeu à deux joueurs est un jeu symétrique si $S_1 = S_2 = A$ *et* $u_1(a,b) = u_2(b,a)$ *pour tout* $a, b \in A$.

Exemple. Duopole de Cournot précédent si les firmes ont le coût marginal constant $c_1 = c_2 = c$. Dans ce cas, quel est l'équilibre de Nash symétrique ?

Proposition 2

Si un jeu symétrique vérifie les hypothèses du théorème d'existence, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures qui est symétrique.

Preuve. Si le jeu est symétrique alors on a clairement $MR1(a) = MR2(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. Comme $f : A \to A$ vérifie les conditions du théorème de Brouwer, il existe $a^\star$ t.q. $a^\star \in f(a^\star)$. Le profil de stratégies pures $(a^\star, a^\star)$ est donc un équilibre de Nash car $a^\star$ est une meilleure réponse à $a^\star$ pour les deux joueurs ($a^\star \in MR_i(a^\star)$, $i = 1, 2$).

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

Qui est Bertrand ?Joseph Bertrand (1822 – 1900) est un mathématicien français qui propose en 1883 une analyse de l'oligopole (sous certaines conditions) qui n'est autre qu'un équilibre de Nash dans un environnement où la compétition se fait par les prix.
Bien avant Nash !

Soient 2 firmes avec des coûts marginaux c_i, $i = 1, 2$.
On note $q(p)$ la demande totale inverse pour le bien homogène produit par les deux firmes telle que $q'(.) < 0$.

Deux hypothèses :

1. Les consommateurs achètent toujours à la firme la moins chère (bien homogène).
2. Si deux vendeurs proposent le même prix de vente, les consommateurs partagent leur demande 50/50 (tie breaking rule).

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

On note $q_i(p_1, p_2)$ la demande de la firme i :

$$
\begin{aligned}
q_i(p_1, p_2) &= 0 \text{ si } p_i > p_j \\
q_i(p_1, p_2) &= \tfrac{q(p)}{2} \text{ si } p_i = p_j \\
q_i(p_1, p_2) &= q(p_i) \text{ si } p_i < p_j
\end{aligned}
$$

Définition du jeu ici :

- les joueurs : les firmes
- Ensemble de stratégies/actions : $p_i \in \mathbb{R}_+$
- Fonctions de payoff (de profit) :

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i) q_i(p_1, p_2)$$

L'équilibre de Nash existe t-il ici ?

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

Une paire $\{p_1^b, p_2^b\}$ est un équilibre de Bertrand (équilibre de "Nash en prix") si :

1. Etant donné $p_2 = p_2^b$, p_1^b résout $\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2^b)$;
2. Etant donné $p_1 = p_1^b$, p_2^b résout $\max_{p_2} \pi_2(p_1^b, p_2)$;

Supposons que $c_1 = c_2 = c$. Quel est l'équilibre ?

- Lemme 1 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $p_1 = p_2 < c$. Pourquoi ? $p_1 = c$ est une déviation strictement profitable pour la firme 1.
- Lemme 2 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $p_1 < \min\{p_2, c\}$. Pourquoi ? A nouveau, $p_1 = c$ est une déviation strictement profitable pour la firme 1.
- Lemme 3 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $c < p_1 = p_2 = p$. Pourquoi ? La firme 1 a une déviation strictement profitable $\tilde{p}_1 = p - \varepsilon$. Augmente son profit.
- Lemme 4 : (p_1, p_2) ne peut pas être un EN si $c < p_1 < p_2$. Pourquoi ? La firme 2 a une déviation strictement profitable : $\tilde{p}_2 = p_1 - \varepsilon$.

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

La seule possibilité restante est $p_1 = p_2 = c$. Est-ce un EN?

- Une déviation en proposant un prix plus faible n'est pas profitable, puisque la firme ferait un profit négatif.
- Une déviation en proposant un prix plus haut n'est pas non plus strictement profitable, puisque les firmes feraient un profit nul avant et après la déviation.
- Donc $p_1 = p_2 = c$ est l'unique EN.

Dans une concurrence à la Bertrand avec des biens homogènes et des coûts marginaux identiques et constants, les firmes ne font aucun profit et propose un prix à l'équilibre qui est égal au coût marginal.

Intuition : les firmes ont des incitations fortes à proposer un prix plus faible que leurs rivales aussi longtemps que les prix excèdent le Cm. En réduisant son prix à celui de sa rivale moins 1 centime, une firme s'approprie tout le marché et en exclue sa rivale.

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

Supposons désormais que les Cm soient différent entre les firmes : $c_1 < c_2$. Quel sera l'équilibre de Nash ?

- En suivant le même raisonnement que précédemment, on peut démontrer qu'il ne peut pas y avoir d'offre pour $p < c_1$ (la firme fait des pertes) et pour $p > c_2$ (déviation $p - \varepsilon$ strictement profitable pour les deux firmes : undercut).
- On a un continuum d'EN :
  - la firme 2 propose un prix $c_1 < p_2 \leq c_2$.
  - la firme 1 propose un prix $p_1 = p_2 - \varepsilon$.

  La firme 1 obtient tout le marché.
- Lequel de ces équilibres est le plus probable ?

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

Les équilibres où $c_1 < p_2 < c_2$ et $p_1 = p_2 - \varepsilon$ ont de très mauvaises propriétés :

- Supposons que la firme 1 tremble lorsqu'elle fixe son prix.
- Plus précisémment, supposons que F1 fasse $p_1 = p_2 - \varepsilon$ avec une probabilité $1 - \eta$ et $p_1 = p_2 + \varepsilon$ avec probabilité η où η est arbitrairement très petite, probabilité qu'elle soit distraite ou fasse des erreurs quand elle fixe son prix.
- Dans ce cas, le profit de la firme 2 est

$$\mathbb{E}\pi_2(p_2) = (1-\eta).0 + \eta(p_2 - c_2)q(p_2) = \eta(p_2 - c_2)q(p_2) < 0$$

- S'il existe une faible proba. d'erreur, fixer $p_2 < c_2$ est une très mauvaise idée pour la firme 2. Elle devrait proposer $p_2 \geq c_2$.

Au contraire l'équilibre où les firmes proposent $p_2 = c_2$ et $p_1 = c_2 - \varepsilon$ ne subit pas cette critique. Il est le plus probable.

4.3 Illustration : la concurrence à la Bertrand

Résumé

- Si les coûts sont les mêmes, l'équilibre de la Concurrence à la Bertrand est prix égale au Cm. La quantité offerte sur le marché est alors celle de CPP, partagée également entre les deux firmes.
- Si les coûts sont différents, disons $c_1 < c_2$, la firme au plus faible coût fixe $p_1 = c_2 - \varepsilon$ et la firme 2 vend $q_2^b = 0$, le firme 1 vend $q_1^b = q(c_2 - \varepsilon)$.